

ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ ПЕРЕХОД ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ¹

Ю.В. Захаров, И.В. Уваев*

Рассмотрено поведение распределения плотности тока и магнитного поля в простейшем одномерном переходе. Получены статические и динамические пороги потери устойчивости перехода и точные выражения, описывающие распределение полей и плотностей токов для статических и динамических мод через эллиптические функции Якоби и эллиптические интегралы. Показано, что джозефсоновский переход при воздействии на него магнитного поля ведёт себя подобно “антиферромагнитно” или “ферромагнитно” упорядоченной цепочке спинов или “динамической доменной структуре”.

Поиск новых свойств различных неоднородных структур представляет интерес не только в теоретическом плане, но и позволяет создавать новые приборы и другие технические устройства на основе новых найденных свойств.

Большой класс неоднородных структур – это слоистые материалы. Свойства таких структур во многом определяются свойствами их поверхностей, т.е. граничными условиями. Такие системы всегда имеют характерные размеры, поэтому следует ожидать появления в них размерных и частотных эффектов.

Одним из наиболее известных размерных эффектов является эйлерова неустойчивость при изгибе стержня конечной длины под действием продольной силы. Для величины этой силы находится спектр собственных значений, каждому из которых соответствует своя искривленная форма стержня. Основополагающая работа М.А. Лаврентьева и А.Ю. Ишлинского [1] показала, что для упругого стержня, помимо статической неустойчивости с последующим простым изгибом стержня, возникающей по достижении пороговой эйлеровой силы, возможно путём взрывного нагружения достижение неустойчивостей, названных ими динамическими, при более высоких пороговых значениях силы с более сложными формами изгиба стержня. При таком динамическом воздействии на систему величина нагрузки должна быть больше, чем величина пороговой силы, а время нарастания нагрузки – меньше времени релаксации системы.

В работах [2, 3] была рассмотрена задача о перемагничивании под действием магнитного поля тонкого ферромагнитного слоя с намагниченностью, закрепленной на одной поверхности и свободной на другой. Было показано, что проблема перемагничивания такого слоя аналогична классической эйлеровой задаче об изгибе тонкого стержня, при этом были найдены последовательности порогов потери устойчивости магнитного слоя под действием магнитного поля в направлениях, антипараллельном и поперечном к направлению закрепления. Таким образом, было показано, что динамическая потеря устойчивости характерна не только для упругих систем, но и для более широкого круга систем.

Одним из представителей слоистых систем является переход Джозефсона. Проведённые ранее исследования [7-9] показали, что стационарный эффект Джозефсона может быть описан уравнениями, аналогичными уравнениям равновесия для некоторых упругих и магнитных систем. Поэтому представляется интересным рассмотреть процессы в джозефсоновском переходе как статическую и динамическую потерю устойчивости. При этом поведение распределения плотности тока и магнитного поля в простейшем одномерном переходе под действием внешнего магнитного поля может рассматриваться как аналогия поведения магнитной системы при перемагничивании или упругого стержня при продольной нагрузке.

Ранее было показано [7], что электродинамика протяженного джозефсоновского контакта для разности фаз φ волновых функций сверхпроводников, образующих контакт, описывается дифференциальным уравнением в частных производных, которое при отсутствии диссипативного члена имеет вид

$$\Delta\varphi - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi, \quad (1)$$

где $\bar{c} = c(1/4\pi C d)^{1/2}$ – скорость распространения вдоль поверхности туннельного перехода электромагнитных волн; $\lambda_J = (\hbar/2\mu_0 e d J_c)^{1/2}$ – джозефсоновская глубина проникновения, т.е. ширина области по краям контакта, в которой протекают джозефсоновские токи. Здесь J_c – джозефсоновский критический ток; C – емкость контакта, приходящаяся на единицу площади; d – толщина области контакта, в которую проникает магнитное поле.

Плотность протекающего через переход тока J определяется уравнением

$$J = J_c \sin \varphi, \quad (2)$$

а взаимодействие джозефсоновского перехода с магнитным полем может быть найдено из выражения

¹ Работа поддержана грантами РФФИ № 02-01-01017 и № 03-01-06433.

* © Ю.В. Захаров, СибГТУ, КрасГУ, 2003. E-mail: uiv2000@mail.ru; И.В. Уваев, СибГТУ, 2003. E-mail: uiv2000@mail.ru.

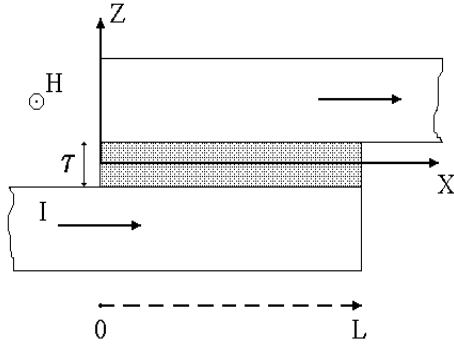


Рис.1. Одномерный джозефсоновский переход с симметричной линейной геометрией

было показано, что джозефсоновское минимальное критическое поле является первым собственным значением данной задачи. Позднее Оуэном и Скалапино [9] найденный спектр решений был связан с условием периодичности и получил геометрическое толкование, как кратность λ_j и размера перехода, описываемая соотношением

$$L = n 2 k \lambda_j K(k^2). \quad (5)$$

Как было показано для магнитных и упругих систем, получаемый в таких задачах спектр собственных значений определяет последовательность порогов потери устойчивости системы. Потеря устойчивости при импульсном воздействии на систему может приводить к появлению метастабильных состояний. Исходя из этого, возникает необходимость более подробного изучения решений уравнения (4).

Для этого рассмотрим контакт простейшей геометрии, показанный на рис. 1. Здесь положительным направлением тока выбрано направление слева направо. Распределение разности фаз волновых функций сверхпроводников, образующих контакт вдоль перехода, описывается уравнением

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\lambda_j^2} \sin\varphi \quad (6)$$

с граничными условиями [8]

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = \frac{H_e}{H_0 L}, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=L} = \frac{H_e}{H_0 L}, \quad (7)$$

где $H_0 L = \Phi_0 / 2\pi d$, здесь Φ_0 – квант магнитного потока; d – толщина области контакта, в которую проникает магнитное поле. Для удобства введём обозначение

$$\lambda_j^2 = I_0 / J_c, \quad (8)$$

где $I_0 = \Phi_0 / L_0$, здесь I_0 есть минимальный ток [5], создающий в переходе с индуктивностью $L_0 = 2\pi\mu_0 d$ квант магнитного потока Φ_0 . Тогда величина $H_0 L$ связана с индуктивностью соотношением $H_0 L = \Phi_0 \mu_0 / L_0 = I_0 \mu_0$.

Уравнение (6) в одномерном случае сводится к хорошо известному уравнению нелинейного маятника, общее решение которого записывается с помощью эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов с модулем k , который определяется плотностью тока, протекающего через переход [9]:

$$\varphi = \pi + 2 \operatorname{am} [x / k\lambda_j + F_{12}, k], \quad (9)$$

где $F_{12} = F[\arcsin(k^{-1} \sqrt{1 - (k\lambda_j H_e / 2H_0 L)^2}), k]$ – константа интегрирования.

В выражении (9) предполагалось, что модуль $k < 1$. Данной ситуации, как было показано в работе [7], соответствует случай, когда внешнее магнитное поле больше собственного поля перехода.

Когда собственное магнитное поле перехода больше внешнего поля, модуль $k > 1$. В этом случае, делая замену $k^{-1} = k^*$, получим

$$\varphi = \pi + 2 \operatorname{arcsin} \{k^* \operatorname{sn}[x/\lambda_j + F_{11}, k^*]\}, \quad (10)$$

где $F_{11} = F[\operatorname{arccos}(\lambda_j H_e / 2k^* H_0 L), k^*]$ – константа интегрирования.

Распределение плотности тока и магнитного поля в пространстве перехода ранее было исследовано только при единственном критическом значении поля. Поэтому представляется интересным более детально рассмотреть поведение плотности тока и магнитного поля в переходе при следующих, динамических пороговых значениях поля.

Для этой цели рассмотрим два случая: а) собственное поле перехода больше внешнего магнитного поля, то есть $k > 1$; б) собственное поле перехода меньше внешнего магнитного поля, следовательно, $k < 1$.

Введем, по аналогии с эйлеровой силой для упругого стержня $P_c = (\pi/2)^2 EI/L^2$, критическое значение плотности тока, соответствующее первому статическому порогу:

$$J_1 = 4 \pi^2 I_0 / L^2, \quad (11)$$

где L – продольный размер одномерного перехода. Соответственно первое критическое значение магнитного поля

$$H_1 = 4 \pi H_0. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что первое критическое значение плотности тока в виде (11) есть плотность минимального тока I_0 , который должен протекать через переход, чтобы при соответствующих его геометрических размерах [5] в нем возник квант магнитного потока. В нашем случае минимальный ток в выражении (11) соответствует для упругого стержня жесткости, т.е. произведению модуля Юнга E на момент инерции I сечения стержня.

Таким образом, для джозефсоновского перехода преодоление очередного порога неустойчивости состоит в появлении следующего кванта магнитного потока в переходе при всегда неоднородном распределении плотности джозефсоновского тока, что характерно для больших переходов. В упругом стержне исходной является однородная, не искривленная форма, и динамическое преодоление очередного порога неустойчивости состоит в появлении очередной моды искривления.

Рассмотрим точные выражения для пространственного распределения плотности тока и напряженности магнитного поля вдоль перехода для обоих случаев а) и б).

В случае а), когда собственное поле перехода больше внешнего магнитного поля, распределение разности фаз вдоль перехода дается выражением (10). Тогда, используя граничные условия (7) и учитывая периодичность эллиптических функций, найдем

$$\frac{J}{I_0} = \left[\frac{4mK(k^*)}{L} \right]^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Учитывая введенный первый статический порог (11), аналогичный эйлеровой силе для упругого стержня, получим выражения для определения зависимости k^* от плотности тока J :

$$J^{(m)} = J_1 (2/\pi)^2 [mK(k^*)]^2. \quad (14)$$

Из выражения (14) при $k^* = 0$ находим величины порогов потери устойчивости:

$$J_{th}^{(m)} = m^2 J_1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Поскольку внешней силой является магнитное поле, найдем выражение для определения зависимости k^* от внешнего магнитного поля

$$H^{(m)} = H_1 \frac{2}{\pi} mK(k^*) \quad (16)$$

и, соответственно, для пороговых значений поля

$$H_{th}^{(m)} = mH_1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Из выражения (17) непосредственно вытекает вывод о том, что для джозефсоновского перехода неустойчивость состоит в появлении следующего кванта магнитного потока.

Зная теперь зависимость (14) модуля k^* от плотности тока J , найдем выражения для пространственного распределения плотности тока вдоль перехода:

$$J(x) = - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 [mK(k^*)]^2 k^* 2J_1 \operatorname{sn} \left(4mK(k^*) \frac{x}{L} + F_{11}, k^* \right) \operatorname{dn} \left(4mK(k^*) \frac{x}{L} + F_{11}, k^* \right) \quad (18)$$

Соответственно для магнитного поля, используя выражение (16) и (3), найдем пространственную зависимость распределения поля вдоль перехода:

$$H(x) = 4mK(k^*) k^* H_0 \operatorname{cn} \left(4mK(k^*) \frac{x}{L} + F_{11}, k^* \right) \quad (19)$$

В случае б), когда собственное поле перехода меньше внешнего поля магнитного поля и пространственное распределение разности фаз дается выражением (9), используя граничные условия (7), аналогично найдем:

$$\frac{J}{I_0} = \left[\frac{2mkK(k)}{L} \right]^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (20)$$

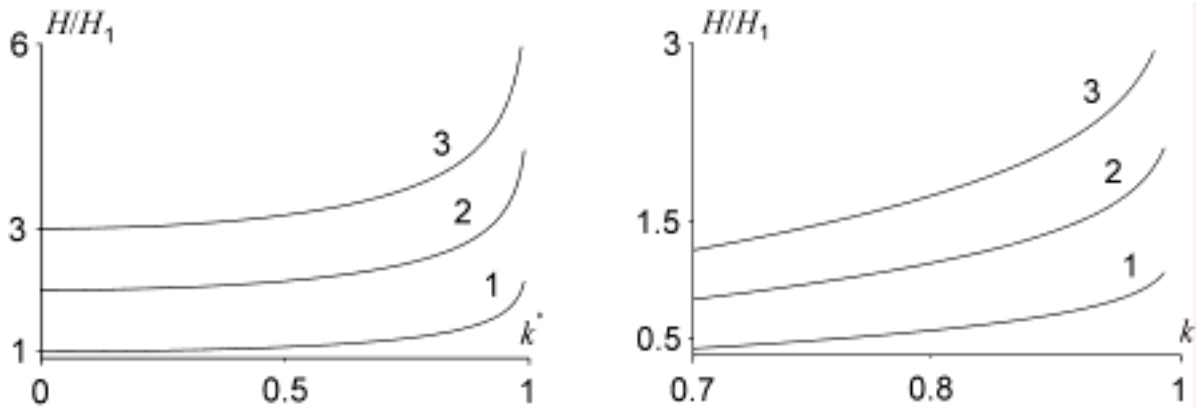


Рис.2. Зависимость магнитного поля от модуля k для разных порогов: 1 – статического ($m=1$); 2 и 3 – динамических ($m=2$ и $m=3$); а – внутреннее поле перехода больше внешнего поля; б – внутреннее поле меньше внешнего

Вводя первое критическое значение плотности тока $J_1 = 4\pi^2 I_0^2 / L^2$, получаем уравнение для определения зависимости модуля k от плотности тока J_m

$$J = (1/\pi)^2 [mkK(k)]^2 J_1. \quad (21)$$

Аналогично для магнитного поля, используя выражение для первого критического поля в виде $H_1 = 4\pi H_0$, получим

$$H = H_1 \frac{1}{\pi} mkK(k). \quad (22)$$

Найдем область определения модуля k . Подставим выражения (22) и (20) в выражения для константы интегрирования, получим $F_{12} = F[\arcsin(k'/k), k]$, где k' – дополнительный модуль ($k^2 + k'^2 = 1$). Отсюда видно, что в этом случае область определения k имеет вид: $S \leq k^2 \leq 1$.

Из выражения (21) при $k^2 = S$ находим величины порогов потери устойчивости:

$$J_{th}^{(m)} = \delta^2 m^2 J_1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (23)$$

где $\delta^2 = K^2(\sqrt{2}/2)/2\pi^2 \cong 0.174$ и для пороговых значений поля при $k^2 = S$ найдём

$$H_{th}^{(m)} = \delta m H_1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (24)$$

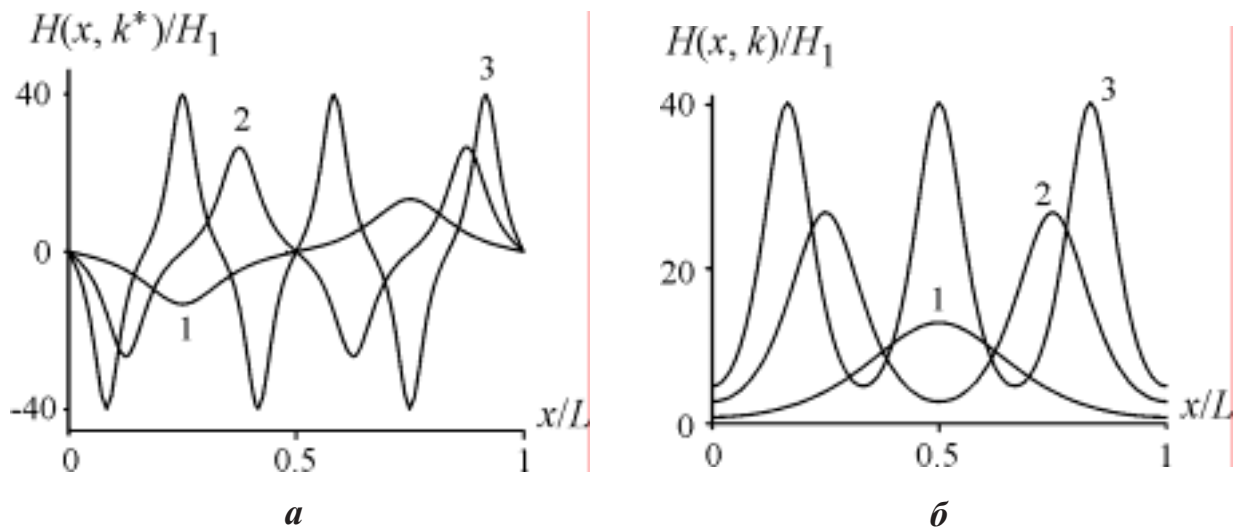


Рис.3. Распределение магнитного поля вдоль перехода по координате x для разных порогов: 1 – статического ($m=1$); 2 и 3 – динамических ($m=2$ и $m=3$); а – внутреннее поле перехода больше внешнего поля; б – внутреннее поле меньше внешнего, при одинаковом модуле, равном 0.99

При $J \rightarrow J_1$ модуль $k^2 \rightarrow S$; в случае, когда $J > J_1$, то $k^2 > S$. Интересно отметить, что выражения (14) и (21) для зависимости модуля k^* и k идентичны друг другу, за исключением того, что k явно входит в уравнение (21) для зависимости J_m в случае б).

На рис. 2 показана зависимость магнитного поля от модуля k .

Для случая б) зависимость распределений плотности тока и магнитного поля вдоль перехода имеет вид

$$J(x) = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 [mkK(k)]^2 2J_1 \operatorname{sn}\left(2mK(k)\frac{x}{L} + F_{12}, k\right) \operatorname{cn}\left(2mK(k)\frac{x}{L} + F_{12}, k\right); \quad (25)$$

$$H(x) = 4mK(k)H_0 \operatorname{dn}\left(2mK(k)\frac{x}{L} + F_{12}, k\right) \quad (26)$$

Найденные распределения магнитного поля вдоль перехода для случаев а) и б), соответственно, представлены на рис.3.

Анализ представленных на рис. 3 распределений магнитного поля в переходе в зависимости от соотношения внешнего и собственного магнитных полей показал, что поведение проникающих в переход вихрей подобно поведению одномерной цепочки спинов в магнитном поле.

В случае, когда внешнее магнитное поле больше собственного, упорядочение системы вихрей происходит «ферромагнитным» способом, вектор напряженности поля проникающих вихрей направлен в одну сторону (рис. 3б). В противоположном случае упорядочение происходит «антиферромагнитным» способом, вихри, проникающие в переход, образуют структуру вихрь – антивихрь (рис. 3а). Таким образом, можно сказать, что возникает своего рода «динамическая доменная структура».

Из выражений (22) и (24) для определения пороговых полей потери устойчивости нетрудно заметить, что зависимость приведенной к первому порогу плотности критического тока от аналогичным образом приведенного внешнего магнитного поля имеет квадратичный вид

$$\frac{J^m}{J_1} = \left(\frac{H^m}{H_1}\right)^2. \quad (27)$$

Для разных порогов (разных m) зависимость $J(H)$ начинается с разных пороговых значений:

$$J_{th}^{(m)} / J_1 = m^2. \quad (28)$$

Проекция всех кривых на одну плоскость $J(H)$ совпадают.

Найденная зависимость плотности критического тока от внешнего поля для разных значений m представлена на рис. 4.

При рассмотрении электродинамики джозефсоновского перехода необходимо найти критерий, характеризующий величину перехода, т.е. определяющий, относится переход к «большим» или «малым».

Подставляя выражение (8) в выражение (11), найдем, что критическая плотность тока, определяемая формулой (11), выражается через джозефсоновскую критическую плотность тока J_c как

$$J_1 = \frac{1}{\chi^2} J_c. \quad (29)$$

Здесь введен безразмерный параметр χ :

$$\chi = \frac{L}{2\pi\lambda_J}. \quad (30)$$

Параметр χ есть отношение линейного размера перехода к периоду изменения фазы ϕ и джозефсоновской глубине проникновения λ_J . Можно считать, что если параметр $\chi > 1$, то переход считается «большим», и в нем в принципе возможно появление кванта потока магнитного поля. А в случае, когда $\chi < 1$, переход считается «малым», и распределение тока в нём однородно.

Соответственно для поля имеем

$$H_1 = \frac{1}{\chi} H_{c_0}. \quad (31)$$

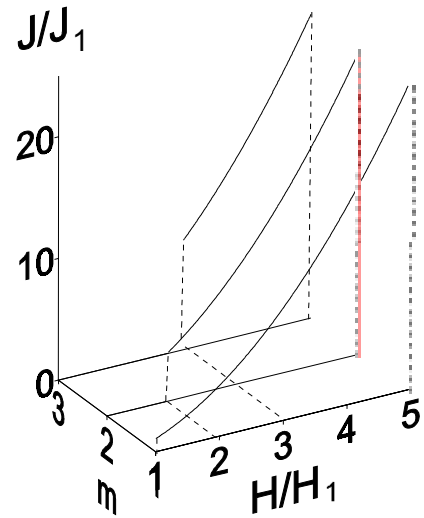


Рис.4. Зависимость плотности критического тока от внешнего поля для разных значений m

Таким образом, формулы (29) и (31) показывают связь между размерными параметрами устойчивости системы – критической плотностью тока J_1 и критическим полем H_1 , с одной стороны, и макроскопическими параметрами, характеризующими само вещество – джозефсоновской критической плотностью тока J_c и минимальным критическим полем H_{c0} , с другой стороны.

Рассмотрим подробнее процесс взаимодействия внешнего магнитного поля с переходом. При начальной величине внешнего поля, равной нулю, и постепенном увеличении внешнего поля, мы имеем ситуацию, описанную в работах [5, 7-9].

В случае резкого увеличения внешнего поля до некоторой критической величины, т.е. до некоторого динамического порога, будет происходить «антиферромагнитное» упорядочение, возникновение своего рода динамической доменной структуры. Дальнейшее поведение системы зависит от величины приложенного внешнего поля. При релаксации системы может произойти упорядочение спинов по полю, или «намагничивание динамической доменной структуры». Этот процесс рассмотренным уравнением не описывается.

Случай, когда начальное внешнее поле больше собственного поля перехода, также был рассмотрен в работах [7-9]. При импульсном воздействии на такую систему в ней также будет наблюдаться динамическая потеря устойчивости. Однако в связи с тем, что начальное состояние не является собственным состоянием системы, а является наведённым состоянием системы, то пороги потери устойчивости появятся при отличном от нуля значении модуля k .

Полученные результаты этой работы по статической и динамической потере устойчивости и распределению магнитного поля в переходе на разных модах могут иметь значение при исследовании высокочастотных свойств перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР. – 1949. – Т. 64. – №6. – С. 779-782.
2. Захаров Ю.В. Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании // ДАН. – 1995. – Т. 344. – №3. – С. 328-332.
3. Захаров Ю.В. Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании. Пороговые поля и частоты магнитного резонанса // Препринт №758Ф. - Красноярск: Ин-т физики СО РАН, Ин-т биофизики СО РАН. - 1995. - С. 40.
4. Zakharov Yu., Ignatchenko V.A. Magnetic resonance in films on antiferromagnetic substrate // Czech. J. Phys. - 1971. – V. B21. – №4-5. - P. 482-485.
5. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновского перехода. – М.: Наука, 1985.
6. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. Физика и применения. – М.: Мир, 1984.
7. Иванченко Ю.М., Свидзинский А.В., Слюсарев В.А. Электродинамика эффекта Джозефсона // ЖЭТФ. – 1966. – Т. 51. – № 1(7). – С. 194-200.
8. Кулик И.О. // ЖЭТФ. – 1966. – Т. 51. – С. 1952.
9. Owen C.S., Scalapino D.J. Vortex structure and critical currents in Josephson junctions // Phys. Rev. – 1967. – V. 164. – P. 538-544.

JOSEPHSON JUNCTION UNDER THE EFFECT OF MAGNETIC FIELD

Yu.V. Zakharov, I.V. Uvaev

Behaviour of distributions of current density and magnetic field with coordinate in the simplest one-dimensional junction is considered. Static and dynamic thresholds of junction instability and exact expressions for distributions of field and current density of static and dynamic modes in terms of the Jacobi elliptic functions and elliptic integrals are obtained. It is shown, that the Josephson junction under magnetization is similar to the “antiferromagnetic” or “ferromagnetic” spin chain or to the “dynamic domain structure”.