

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ СВЕРХРЕШЕТКАХ

В. А. Игнатченко, О. Н. Лалетин *

Исследуется распространение электромагнитных волн в одномерной сверхрешетке с произвольной толщиной границ (интерфейсов) между слоями мультислойной структуры, модель которой предложена ранее. Методом модифицированной теории связанных волн рассчитаны коэффициенты прохождения и отражения, а также ширины щелей в спектре на границах зон Бриллюэна в зависимости от толщины интерфейсов. Показана принципиальная возможность определения толщины интерфейса из экспериментально измеренных коэффициентов прохождения или отражения электромагнитных волн в сверхрешетке.

Распространению и преобразованию электромагнитных волн в одномерных периодических средах - сверхрешетках (SL) - посвящено большое число работ (см., например, обзоры [1, 2] и ссылки в них). Одним из наиболее известных методов расчета является метод связанных волн, развитый в работе Когельника [3]. Основное предположение Когельника состоит в малости изменения характеристик волн на длине периода l структуры, что хорошо выполняется в случае близости частоты падающей волны к частоте брэгговского резонанса SL. В работе [4] этот метод был применен для расчета пороговых коэффициентов усиления и частот генерации в ограниченной одномерной среде с диэлектрической проницаемостью, меняющейся по гармоническому закону. Получено, что коэффициент связи (центральный параметр уравнений связанных волн Когельника) отличен от нуля лишь в случае первого брэгговского резонанса. Это обстоятельство не позволяло применить стандартную систему уравнений связанных волн для описания высших брэгговских резонансов при гармоническом законе модуляции диэлектрической проницаемости. Физической причиной подобной неприменимости является возрастающая роль многоволновой и многократной дифракции на периодических неоднородностях SL [2].

Идея модификации стандартной теории связанных волн была сформулирована в работе [5], а затем была применена к расчету преобразования волн в периодически гофрированных волноводах [6]. Последующее сопоставление результатов расчета по модифицированной теории связанных волн (МТСВ) с прямыми численными расчетами показало хорошее совпадение кривых зависимостей коэффициента отражения от частоты и числа периодов в структуре для брэгговских резонансов различных порядков. Помимо расчета коэффициентов отражения и прохождения через периодически модулированные среды большой интерес представляет расчет ширины запрещенных зон (щелей) в спектре на границах зон Бриллюэна SL. Напомним, что для непоглощающих сред из общей теории следует существование на дисперсионных кривых запрещенных зон, внутри которых волновой вектор в веществе является комплексным, в то время как вне этих зон волновой вектор чисто веществен (более подробно см., например, [7], а также обзоры [1, 2]). Другими словами, электромагнитная волна из распространяющейся вне запрещенной зоны превращается в затухающую внутри нее.

Как правило, в литературе широко рассматриваются два вида пространственной модуляции диэлектрической проницаемости: синусоидальная и прямоугольная. Они соответствуют двум предельным значениям толщины границы d между слоями SL: $d=0$ для прямоугольного профиля (прямоугольной модуляции диэлектрической проницаемости) и $d=l/4$ для синусоидального профиля. В реальных SL толщина границы d может, вообще говоря, принимать произвольные значения между этими двумя предельными случаями. Для описания такой ситуации в работе [8] была предложена модель сверхрешетки, в которой профиль модуляции представляется в виде эллиптического синуса Якоби. В этой работе были также вычислены ширины щелей на границах всех нечетных зон Бриллюэна и показано, что экспериментальное измерение ширины этих щелей позволило бы определять толщину границы d между слоями SL. В работе [8] расчет был проведен для спектра стоячих волн, что соответствует, например, экспериментальной ситуации спин-волнового резонанса в ферромагнетике, которая позволяет исследовать непосредственно закон дисперсии волн. В экспериментах с бегущими электромагнитными волнами измеряются другие параметры - коэффициенты отражения и прохождения волн в веществе. Поэтому необходим расчет как этих коэффициентов, так и ширины щелей для распространяющихся электромагнитных волн. Расчет этих параметров методом МТСВ для модели [8] с произвольной толщиной границ между слоями SL и является целью настоящей работы.

Рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны на SL, модулированную вдоль направления z . В этом случае уравнение для напряженности электрического поля $E(z)$ в среде имеет вид

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + \mu^2 \epsilon(z) E(z) = 0, \quad (1)$$

* © В. А. Игнатченко, Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН, 2003. E-mail: vignatch@iph.krasn.ru; О.Н. Лалетин, Красноярский государственный университет, 2003.

где $\mu = \omega/c$ - частота, нормированная к размерности волнового числа (волновое число в вакууме); $\epsilon(z)$ - периодически модулированная диэлектрическая проницаемость. Представим $\epsilon(z)$ в удобном для последующих расчетов виде:

$$\epsilon(z) = \epsilon' [1 + \gamma \rho(z) - i\epsilon''/\epsilon'] , \quad (2)$$

где ϵ' - среднее значение действительной части диэлектрической проницаемости; γ - величина относительной модуляции, в нашей работе мы ограничимся случаем $\gamma < 1$; $\rho(z)$ представляет собой периодическую функцию, для которой $\langle \rho \rangle = 0$ и $\langle \rho^2 \rangle = 1$ (угловые скобки означают усреднение по периоду l); поглощение ϵ'' считается постоянным и $\epsilon'' \ll \epsilon'$.

В стандартной теории связанных волн решение уравнения вблизи m -го брэгговского резонанса представляется в следующем виде:

$$E(z) = E^+(z) e^{-i\mu\sqrt{\epsilon' - i\epsilon''}z} + E^-(z) e^{i\mu\sqrt{\epsilon' - i\epsilon''}z} . \quad (3)$$

Используя разложение периодической функции $\rho(z)$ в ряд Фурье

$$\rho(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n e^{inqz} \quad (4)$$

и вводя величину $\zeta = \mu\sqrt{\epsilon'} - mq/2$ - отстройку от невозмущенного центра m -го брэгговского резонанса, $m=1, 2, 3, \dots$, $q=2\pi/l$ - вектор SL, подставим (3) в (1). В результате получим точное уравнение второго порядка, связывающее амплитуды $E^\pm(z)$. Используем предположение Когельника о малости преобразования прямой волны в обратную на длине периода. Тогда амплитуды $E^\pm(z)$ можно считать постоянными на периоде l и усреднить точное уравнение по периоду методом, описанным в [2]. В получившейся приближенной системе обычно пренебрегают вторыми производными от $E^\pm(z)$, поэтому стандартная система уравнений связанных волн имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dE^+(z)}{dz} = \chi_m^+ e^{(\mu\epsilon''/\sqrt{\epsilon'} + 2i\zeta)z} E^-(z) , \\ \frac{dE^-(z)}{dz} = \chi_m^- e^{-(\mu\epsilon''/\sqrt{\epsilon'} + 2i\zeta)z} E^+(z) , \end{cases} \quad (5)$$

где $\chi_m^\pm = \mp i\gamma m q \rho_{\mp m} / 4$ - коэффициенты связи.

В отличие от стандартной теории в МТСВ решение как для $E(z)$, так и для $H(z)$ представляется в виде, похожем на геометрические решения в неоднородной среде [2, 5]:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\epsilon(z)}} \left[E^+(z) e^{-i\psi(z)} + E^-(z) e^{i\psi(z)} \right] , \\ H(z) &= \sqrt[4]{\epsilon(z)} \left[-E^+(z) e^{-i\psi(z)} + E^-(z) e^{i\psi(z)} \right] , \end{aligned} \quad (6)$$

где $\psi(z) = \mu\sqrt{\epsilon'} \int_0^z \sqrt{1 + \gamma \rho(z') - i\epsilon''/\epsilon'} dz'$ - так называемая геометрическая фаза; $E^+(z)$ и $E^-(z)$ - переменные амплитуды. Подставив (6) в уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{e}_x H(z) &= i\mu\epsilon(z) \mathbf{e}_y E(z) , \\ \text{rot } \mathbf{e}_y E(z) &= -i\mu \mathbf{e}_x H(z) , \end{aligned} \quad (7)$$

в которых уже учтено, что $E(z,t) \sim e^{im\omega t}$ и $H(z,t) \sim e^{im\omega t}$, а $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ - орты осей Ox и Oy , получим точную систему уравнений для амплитуд $E^\pm(z)$:

$$\begin{cases} \frac{dE^+(z)}{dz} = S^+(z)E^-(z), \\ \frac{dE^-(z)}{dz} = S^-(z)E^+(z), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$S^\pm(z) = \frac{1}{4\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} e^{\pm 2i\psi(z)}.$$

Усредняя коэффициенты $S^\pm(z)$ по быстрым осцилляциям, получим приближенную систему уравнений, по форме похожую на систему уравнений Когельника (5), но с другими значениями постоянных параметров:

$$\begin{cases} \frac{dE^+(z)}{dz} = \kappa_m^+ e^{(\alpha+2i\delta)z} E^-(z), \\ \frac{dE^-(z)}{dz} = \kappa_m^- e^{-(\alpha+2i\delta)z} E^+(z), \end{cases} \quad (9)$$

где $\delta = \mu\sqrt{\bar{\varepsilon}'} - mq/2$ - отстройка от невозмущенного центра m -го брэгговского резонанса; $m=1, 2, 3, \dots$; $\sqrt{\bar{\varepsilon}'} = \psi(l)/\mu l$ - среднее значение показателя преломления; $\alpha = \mu\bar{\varepsilon}''/\sqrt{\bar{\varepsilon}'}$, κ_m^\pm - коэффициенты связи, определяемые выражением

$$\begin{aligned} \kappa_m^\pm = & \frac{1}{4l} \int_0^l \frac{dz}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \exp(\pm 2i\psi(z) \mp 2i\mu\sqrt{\bar{\varepsilon}'}z \pm imqz) + \\ & + \frac{1}{4l} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\varepsilon(z_i+0)}{\varepsilon(z_i-0)} \exp(\pm 2i\psi(z_i) \mp 2i\mu\sqrt{\bar{\varepsilon}'}z_i \pm imqz_i). \end{aligned} \quad (10)$$

В формуле (10) интеграл понимается в смысле главного значения, а сумма по i учитывает вклад в величины κ_m^\pm скачков диэлектрической проницаемости в точках z_i , $\varepsilon(z_i \pm 0) = \lim_{z \rightarrow z_i \pm 0} \varepsilon(z)$.

Относительно одной из амплитуд, например $E^+(z)$, из системы получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 E^+(z)}{dz^2} - (\alpha + 2i\delta) \frac{dE^+(z)}{dz} - \kappa_m^+ \kappa_m^- E^+(z) = 0. \quad (11)$$

Решив получившееся уравнение, получим:

$$E^+(z) = [C_1 \exp(sz) + C_2 \exp(-sz)] \exp\left(\frac{\alpha + 2i\delta}{2} z\right). \quad (12)$$

Выражение для $E^-(z)$ можно найти с помощью одного из уравнений системы (9):

$$E^-(z) = \frac{1}{\kappa_m^+} \left\{ C_1 \left[\frac{\alpha + 2i\delta}{2} + s \right] \exp(sz) + C_2 \left[\frac{\alpha + 2i\delta}{2} - s \right] \exp(-sz) \right\} \exp\left(-\frac{\alpha + 2i\delta}{2} z\right). \quad (13)$$

В формулах (12) и (13) принято следующее обозначение:

$$s = \sqrt{\left(\frac{\alpha + 2i\delta}{2}\right)^2 + \kappa_m^+ \kappa_m^-}, \quad (14)$$

а C_1 и C_2 - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Рассчитаем с помощью МТСВ коэффициенты отражения и прохождения для ограниченной SL (рис. 1), толщина L которой равна целому числу периодов l .

В этом случае условия непрерывности напряженности электрического поля на границах раздела сред, а также ее производных дают следующую систему уравнений [2]:

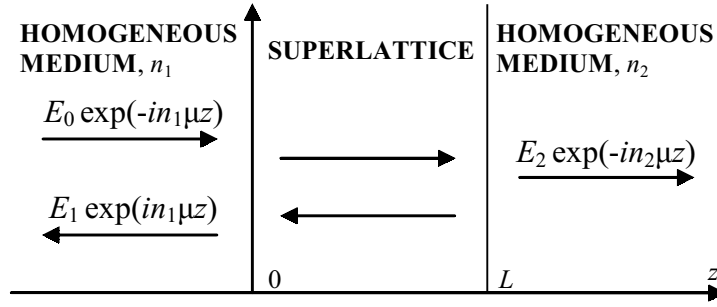


Рис. 1. Нормальное падение электромагнитной волны на SL

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 + E_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{\epsilon(0)}} [E^+(0) + E^-(0)], \\ n_1 [-E_0 + E_1] = \sqrt[4]{\epsilon(0)} [-E^+(0) + E^-(0)], \\ E_2 \exp(-in_2 \mu L) = \frac{1}{\sqrt[4]{\epsilon(L)}} [E^+(L) \exp(-i\psi(L)) + E^-(L) \exp(i\psi(L))], \\ -n_2 E_2 \exp(-in_2 \mu L) = \sqrt[4]{\epsilon(L)} [-E^+(L) \exp(-i\psi(L)) + E^-(L) \exp(i\psi(L))] \end{array} \right. \quad (15)$$

относительно неизвестных E_0, E_1, E_2, C_1 и C_2 . Отсюда получаем следующие выражения для коэффициента отражения R

$$R \equiv \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^2 = \left| \frac{r_1 + E^-(0)/E^+(0)}{1 + r_1 E^-(0)/E^+(0)} \right|^2 \quad (16)$$

и для коэффициента прохождения D

$$D \equiv \left| \frac{E_2}{E_0} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt[4]{\epsilon(0)}}{\sqrt[4]{\epsilon(L)}} \frac{2s(1+r_1)(1+r_2) \exp(i\mu n_2 L - \phi/2)}{\{2s \cosh sL - [2\kappa_m^+ r_2 \exp(-\phi) - (\alpha + 2i\delta)] \sinh sL\} [1 + r_1 E^-(0)/E^+(0)]} \right|^2, \quad (17)$$

где

$$r_1 = \frac{n_1 - \sqrt{\epsilon(0)}}{n_1 + \sqrt{\epsilon(0)}}, \quad r_2 = -\frac{n_2 - \sqrt{\epsilon(L)}}{n_2 + \sqrt{\epsilon(L)}},$$

$$\frac{E^-(0)}{E^+(0)} = \frac{2sr_2 \exp(-\phi) \cosh sL - [2\kappa_m^- + r_2(\alpha + 2i\delta) \exp(-\phi)] \sinh sL}{2s \cosh sL - [2\kappa_m^+ r_2 \exp(-\phi) - (\alpha + 2i\delta)] \sinh sL},$$

$$\phi = -(\alpha + 2i\delta)L + 2i\psi(L).$$

Заметим, что при $\delta=0$, отсутствии поглощения в среде ($\epsilon''=0$) и отсутствии периодической модуляции диэлектрической проницаемости ($\gamma \rightarrow 0$), выражения (16) и (17) приобретают хорошо известный вид [9]:

$$R = \left| \frac{r_1 [\exp(2i\psi(L)) - 1]}{\exp(2i\psi(L)) - r_1^2} \right|^2, \quad D = \left| \frac{1 - r_1^2}{\exp(i\psi(L)) - r_1^2 \exp(-i\psi(L))} \right|^2, \quad (18)$$

где для простоты принято, что $n_1 = n_2 = 1$ (однородная пластинка толщиной L в вакууме).

В случае непоглощающих сред ($\epsilon''=0$) выражения (12) и (13) для амплитуд $E^+(z)$ и $E^-(z)$ содержат множители $\exp(\sqrt{\kappa_m^+ \kappa_m^- - \delta^2} z)$. Если величина отстройки δ такова, что $\delta^2 < \kappa_m^+ \kappa_m^-$, то в показателе экспоненты стоит действительная величина и электромагнитная волна в этом случае является затухающей. В другом случае, когда $\delta^2 > \kappa_m^+ \kappa_m^-$,

мы имеем дело с распространяющейся волной. Таким образом, границы m -й запрещенной зоны определяются уравнениями, в которых κ_m^\pm являются функциями от μ_m^\pm :

$$\mu_m^\pm = \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{mq}{2} \pm \sqrt{\kappa_m^+ \kappa_m^-} \right) \right]_{\epsilon''=0}, \quad (19)$$

а ширина запрещенной зоны определяется уравнением

$$\Delta\mu_m \equiv \mu_m^+ - \mu_m^- = \left[\frac{2\sqrt{\kappa_m^+ \kappa_m^-}}{\sqrt{\epsilon}} \right]_{\epsilon''=0}, \quad (20)$$

где величины κ_m^\pm и $\sqrt{\epsilon}$ необходимо рассчитывать, положив $\epsilon''=0$.

Перейдем непосредственно к расчету ширины запрещенной зоны. Прежде всего остановимся на двух хорошо изученных видах SL: с прямоугольным и синусоидальным профилем.

Для SL с прямоугольным профилем (рис. 2) в выражении (10) остается только сумма:

$$\kappa_m^\pm = \frac{1}{4l} \sum_{i=1}^2 \ln \frac{\epsilon(z_i+0)}{\epsilon(z_i-0)} \exp(\pm 2i\psi(z_i) \mp 2i\mu\sqrt{\epsilon}z_i \pm imqz_i), \quad (21)$$

где в сумме учитывается вклад от двух скачков диэлектрической проницаемости: при $z=0$ и $z=l/2$. Пользуясь тем, что $\gamma \ll 1$ и $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, разложим логарифм, $\psi(z)$ и $\sqrt{\epsilon}$ в ряд по этим малым величинам. В результате получим следующее промежуточное выражение:

$$\kappa_m^\pm \approx \mp \frac{i}{2\pi} \gamma q \exp\left(\pm \frac{i}{4} \gamma m \pi \pm \frac{i}{2} m \pi\right) \sin\left(\frac{1}{4} \gamma m \pi + \frac{1}{2} m \pi\right). \quad (22)$$

В (22) уже учтено, что $\mu\sqrt{\epsilon'} \approx mq/2$. Если номер резонанса m не слишком велик, т.е. выполняется условие

$$\gamma\mu\sqrt{\epsilon'}l \approx \gamma m \ll 1, \quad (23)$$

то синус в (22) можно разложить в ряд по малой величине. В итоге получим:

$$\kappa_m^\pm \approx \frac{1}{2\pi} \gamma q \exp\left(\pm \frac{i}{4} \gamma m \pi\right), \quad m - \text{нечетное}, \quad (24)$$

$$\kappa_m^\pm \approx \mp \frac{i}{8} \gamma^2 m q \exp\left(\pm \frac{i}{4} \gamma m \pi\right), \quad m - \text{четное}.$$

Подставив (24) в (16) и (17), получим явное выражение для R и D . На рис. 3 представлены графики зависимости коэффициентов отражения и прохождения от величины отстройки δ в окрестности первой зоны ($m=1$). График зависимости коэффициента отражения, рассчитанный по формуле (16) для частот от первой до третьей зоны, изображен на рис. 4.

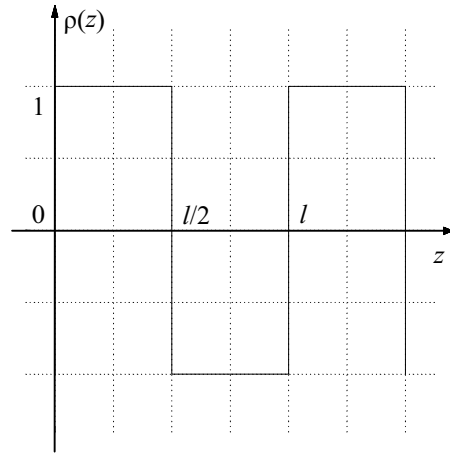


Рис. 2. Функция $\rho(z)$ для SL с прямоугольным профилем

Положив $\epsilon''=0$ и подставив (24) в (20), для ширины запрещенной зоны получим следующее выражение:

$$\Delta\mu_m \approx \frac{1}{\pi} \gamma q \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}}, \quad m - \text{нечетное},$$

$$\Delta\mu_m \approx \frac{1}{4} \gamma^2 m q \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}}, \quad m - \text{четное}, \quad (25)$$

что согласуется с известными результатами [7, 8].

Дополнительная периодическая модуляция на рис. 3 и 4 соответствует многократному отражению волны от границ пластины. Далее рассмотрим SL с синусоидальным профилем (рис. 5). В формуле (10) остается только интеграл:

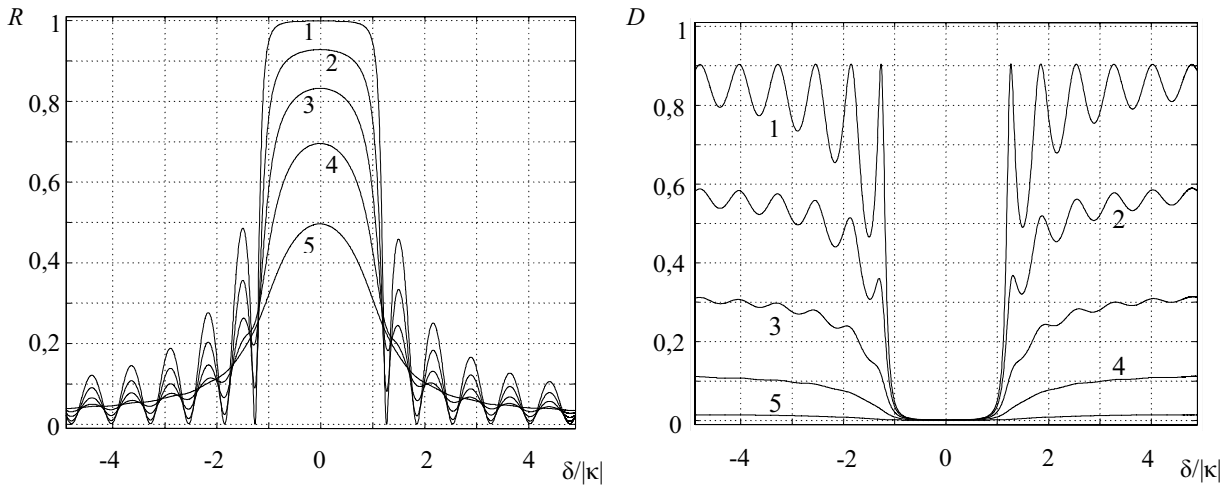


Рис. 3. Коэффициенты отражения R и прохождения D для SL с прямоугольным профилем; 1- $\alpha/|\kappa|=0$; 2- $\alpha/|\kappa|=0,1$; 3- $\alpha/|\kappa|=0,25$; 4- $\alpha/|\kappa|=0,5$; 5- $\alpha/|\kappa|=1$; $|\kappa|=\gamma q/2\pi$, $\gamma=0,1$; $l=1$ мкм, $L/l=40$

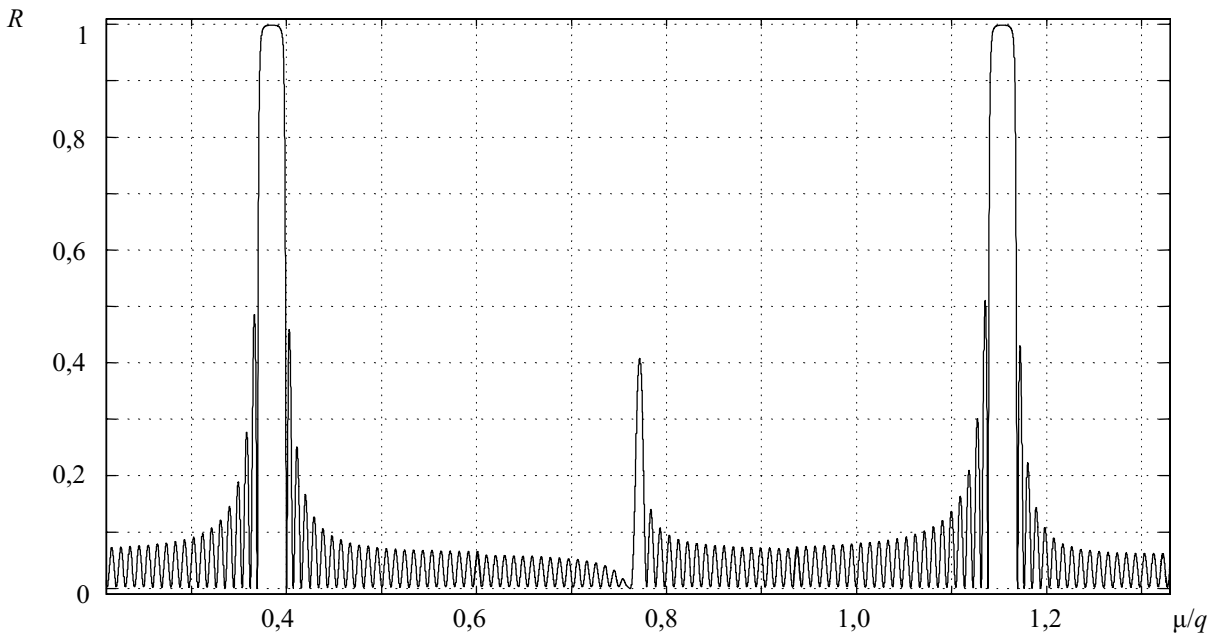


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения R от SL с прямоугольным профилем от m в области частот от первой до третьей зон; $\epsilon'=1,69$; $\epsilon''=0$, $\gamma=0,1$; $l=1$ мкм, $L/l=40$

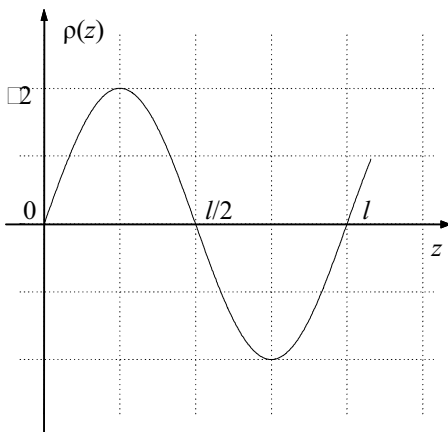


Рис. 5. Функция $\rho(z)$ для SL с синусоидальным профилем

$$\kappa_m^\pm = \frac{\sqrt{2}\gamma}{4l} \int_0^l \frac{d(\sin qz) \exp(\pm 2i\psi(z) \mp 2i\mu\sqrt{\epsilon}z \pm imqz)}{1 + \sqrt{2}\gamma \sin qz - i\epsilon''/\epsilon'} dz. \quad (26)$$

Разложив подынтегральное выражение в ряд по малой величине γ до γ^2 и вычислив интегралы, получим выражение, справедливое для двух первых зон Бриллюэна, $m=1$ и $m=2$:

$$\kappa_m^\pm \approx \frac{\sqrt{2}}{8} \gamma q \left[\left(1 + i \frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) \delta_{m1} \mp \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma \left(\frac{m}{2} + 1\right) \delta_{m2} \right] \exp\left(\pm \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma m\right), \quad (27)$$

где δ_{m1} и δ_{m2} – символы Кронекера. При выводе соотношения (27) предполагалось выполнение условия (23).

Как и в предыдущем случае, подставив (27) в (16) и (17), получим явные выражения для коэффициентов R и D , графики которых для

$m=1$ качественно не отличаются от графиков на рис. 3. Положив в (27) $\varepsilon''=0$, для ширины запрещенной зоны получим:

$$\Delta\mu_m \approx \frac{\sqrt{2}}{4} \gamma q \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} \left[\delta_{m1} + \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{m}{2} + 1 \right)^2 \delta_{m2} \right]^{1/2}. \quad (28)$$

Известно, что ширины запрещенных зон для синусоидальной решетки рассчитаны при помощи функций Маттье до любых степеней γ и их значения приведены в соответствующих математических таблицах (см., например, [10]). Для $m=1$ из выражения (28) получаем $\Delta\mu_1 \approx \sqrt{2} \gamma q / 4 \sqrt{\varepsilon'}$, что совпадает с соответствующим членом порядка γ точного выражения [10]. Таким образом, МТГСВ удовлетворительно описывает ширины запрещенных зон в области применимости этой теории.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, взяв в качестве закона изменения $\rho(z)$ модель, предложенную в [8]. Согласно этой модели $\rho(z)$ представляется в виде

$$\rho(z) = \kappa \left(\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{K} - \mathbf{E}} \right)^{1/2} \operatorname{sn} \left(\frac{\pi z}{2d} \right), \quad (29)$$

где $d=pl/8\mathbf{K}$ - толщина границы между слоями; \mathbf{K} и \mathbf{E} - полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; κ - модуль этих интегралов. Удобство этой модели состоит в том, что выражение (29) описывает как два предельных случая: $d/l=0$ при $\kappa=1$ ($\mathbf{K}=\infty$), $d/l=1/4$ при $\kappa=0$ ($\mathbf{K}=\pi/2$), так и все промежуточные состояния. Функцию $\rho(z)$ в виде (29) можно разложить в ряд Фурье (4), где коэффициенты ρ_n имеют следующий вид [8, 10]:

$$\rho_n = \frac{\pi}{i\sqrt{\mathbf{K}(\mathbf{K} - \mathbf{E})}} \frac{Q^{|n|/2}}{1 - Q^{|n|}} \operatorname{sgn}(n), \quad Q = e^{-\pi\kappa'/\mathbf{K}}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (30)$$

Здесь $\mathbf{K}'(\kappa) = \mathbf{K}(\kappa')$, $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$ - дополнительный модуль. В нашем случае в выражении (10) остается только интеграл

$$\kappa_m^\pm = \frac{1}{4l} \int_0^l \frac{dz}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \exp(\pm 2i\psi(z) \mp 2i\mu\sqrt{\varepsilon'} z \pm imqz). \quad (31)$$

Как и раньше, предположим, что номер резонанса m не слишком велик, т.е. выполняется соотношение (23). Тогда подынтегральное выражение в (31) можно разложить в ряд по малой величине γ . Ограничив порядок разложения третьей степенью γ , получим:

$$\begin{aligned} \kappa_m^\pm \approx \frac{1}{4l} e^{\pm i\Phi_0} \int_0^l \left[A\gamma\rho' + \gamma^2 (\pm 2i\mu\sqrt{\varepsilon'} g_1 \rho' - \rho\rho') + \right. \\ \left. + \gamma^3 (\mp 2i\mu\sqrt{\varepsilon'} g_2 \rho' - 2\mu^2 \varepsilon' g_1^2 \rho' \mp 2i\mu\sqrt{\varepsilon'} g_1 \rho\rho' + \rho^2 \rho') \right] e^{\pm imqz} dz, \end{aligned} \quad (32)$$

$$g_1 = -\frac{i}{2q} \sum_n \frac{\rho_n}{n} e^{inqz}, \quad g_2 = -\frac{i}{8q} \sum_{n+p \neq 0} \frac{\rho_n \rho_p}{n+p} e^{i(n+p)qz},$$

$$\Phi_0 = \frac{i}{2} \gamma m \sum_n \frac{\rho_n}{n}, \quad A = 1 + i \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} - \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2.$$

После вычисления интеграла в (32), для коэффициентов связи получим выражения:

$$\kappa_m^\pm \approx \left(\frac{i}{4} A \gamma m q \rho_m + \frac{i}{32} \gamma^3 m q S \right) e^{\pm i\Phi_0}, \quad m - \text{нечетное}, \quad (33)$$

где

$$S = \sum_{n+p \neq 0} \rho_n \rho_p \rho_{m-n-p} \frac{m-n-p}{n+p} + \sum_{n,p} \rho_n \rho_p \rho_{m-n-p} \left(m \frac{m-n-p}{np} + 2 \frac{n+p}{m-n-p} + \frac{8}{3} \right),$$

и

$$\kappa_m^\pm \approx \pm \frac{i}{8} \gamma^2 m^2 q e^{\pm i\Phi_0} \sum_n \frac{1}{n} \rho_n \rho_{m-n}, \quad m - \text{четное.} \quad (34)$$

В выражениях (33) и (34) мы заменили множитель $\mu\sqrt{\epsilon'}$, стоящий при γ^3 и γ^2 , соответственно, на $mq/2$, т.к. более высокие порядки малости нас не интересуют. Положив в (33) и (34) $\epsilon''=0$, для ширины запрещенной зоны получим:

$$\Delta\mu_m \approx \frac{1}{2} mq \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} \left| \gamma \rho_m + \frac{1}{8} \gamma^3 (\rho_m + S) \right|, \quad m - \text{нечетное,}$$

$$\Delta\mu_m \approx \frac{1}{4} \gamma^2 m^2 q \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} \left| \sum_n \frac{1}{n} \rho_n \rho_{m-n} \right|, \quad m - \text{четное.} \quad (35)$$

Сравнение результатов расчета ширины запрещенной зоны по МТСВ с точными результатами для двух предельных случаев приведено в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение результатов расчета по МТСВ с точными результатами

Профиль сверхрешетки	Номер резонанса m	Ширина запрещенной зоны $\Delta\mu_m\sqrt{\epsilon'}$	
		МТСВ	Точное значение
Прямоугольный	Нечетный	$gq/p+\dots$	$gq/p+\dots$
	Четный	$g^2mq/4+\dots$	$g^2mq/4+\dots$
Синусоидальный	1	$gqL/4+\dots$	$gqL/4+\dots$
	2	$g^2q/2+\dots$	$g^2q/2+\dots$
	3	$g^3q244L/2^9+\dots$	$g^3q243L/2^9+\dots$

На рис. 6 изображена зависимость ширины запрещенной зоны от толщины границы между слоями, рассчитанной по формуле. Графики зависимости $\Delta\omega_m$ от d для нечетных зон Бриллюэна соответствуют графикам работы [8], если в последних заменить частотный параметр ν , соответствующий спиновым волнам, нашим частотным параметром $\mu=(\nu/\epsilon')^{1/2}$ и переопределить параметр γ . Зависимости $\Delta\omega_m(d)$ для четных зон в данной работе получены впервые. Подобно тому, как для нечетных зон $\Delta\omega_m$ для $m=1$ практически не зависит от d , а для $m>1$ имеет сильную зависимость, для четных зон $\Delta\mu_m$ для $m=2$ практически не зависит от d , а для $m>2$ имеет сильную зависимость. Однако если для нечетных зон их ширина не зависит от m при $d=0$, для четных зон $\Delta\mu_m$ при $d=0$ растет с ростом m .

Суммируем полученные в работе результаты. Исследованы коэффициенты прохождения и отражения электромагнитных волн в пластине с модулированной величиной диэлектрической проницаемости. Согласно модели работы [8] профиль модуляции описывался эллиптическим синусом Якоби, что позволило исследовать как предельные случаи прямоугольной (толщина интерфейсов равна нулю) и синусоидальной (толщина интерфейсов равна толщине слоев) модуляции, так и все промежуточные случаи. Расчет проведен методом модифицированной теории связанных волн (МТСВ), краткий обзор которой сделан в данной работе. Рассчитаны ширины щелей на границах как нечетных, так и четных зон Бриллюэна. Зависимость ширины нечетных зон от толщины интерфейса соответствует рассчитанному ранее [8] другим методом; зависимости ширины четных зон рассчитаны впервые. На примере предельного случая прямоугольного профиля SL рассмотрено, как будет влиять на точность определения ширины щели из экспериментальных измерений коэффициентов прохождения и отражения затухание волн в материале SL.

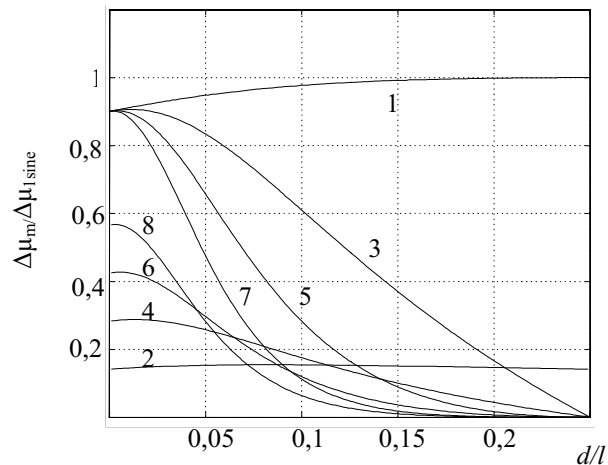


Рис. 6. Зависимость ширины запрещенной зоны от толщины границы; $\Delta\mu_{1,sine}$ - ширина 1-й зоны SL с синусоидальным профилем, $\gamma=0,1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Элаши Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах//ТИИЭР. - 1976. - Т. 64. - Вып. 12. - С. 22-57.
2. Карпов С. Ю., Столяров С. Н. Распространение и преобразование волн в средах с одномерной периодичностью//УФН. - 1993. - Т. 163. - Вып. 1. - С. 63-89.
3. Kogelnik H. Coupled wave theory for thick hologram grating//BSTJ. - 1969. - V. 48. - № 9. - P. 2909-2947.
4. Kogelnik H., Shank C. V. Coupled-wave theory of distributed feedback lasers//J. Appl. Phys. - 1972. - V. 43. - № 5. - P. 2327-2335.
5. Мартынов Н. Н., Столяров С. Н. К теории распространения волн в периодических структурах//КЭ. - 1978. - Т. 5. - Вып. 8. - С. 1853-1855.
6. Мартынов Н. Н. Уравнения связанных волн для гофрированного волновода//КЭ. 1978. Т. 6, вып. 8. С. 1798-1801.
7. Бриллоэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. - М.: ИЛ, 1959.
8. Ignatchenko V. A., Mankov Yu. I., Maradudin A. A. Wave spectrum of multilayers with finite thicknesses of interfaces//Phys. Rev. B. - 2000. - Vol. 62. - № 3. - P. 2181-2184.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - С. 412-413.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. - М.: Наука, 1979.

THE PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN ONE-DIMENSIONAL SUPERLATTICES

V. A. Ignatchenko and O. N. Laletin

The propagation of electromagnetic waves in the one-dimensional superlattice with an arbitrary thickness of interfaces between the layers of multilayers structure, the model of that has been suggested earlier, is studied. Using the methods of the modified theory of coupled waves the coefficients of propagation and refraction, as well as the widths of the gaps in the spectrum at the Brillouin zones boundaries, are calculated. The principal possibility of determining the thicknesses of the interfaces from the experimental measurements of the propagation or refraction coefficients is shown.