УДК 530.12:531.51

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННЕГО ПРИПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ЗВЕЗДЫ

А.М.Баранов, С.Ф.Тегай*

Предлагается метод моделирования излучающих звезд, основанный на сшивке Дармуа внешнего пространства Вайдья и внутреннего сферически-симметричного пространства общего вида. В качестве поверхности сшивки выбирается сфера переменного радиуса R(u). Скорость поверхности, в отличие от других авторов, использовавших формализм Дармуа, не совпадает со скоростью вещества на поверхности. Приближенное решение соответствующих уравнений Эйнштейна записывается в виде ряда Тэйлора по степеням R(u)-r. Коэффициенты ряда находятся из условий сшивки и уравнений Эйнштейна, взятых на поверхности. Подробнее рассмотрен случай с постоянными радиусом и светимостью модели. Для него получены вторые производные метрических коэффициентов и первые производные давления и плотности звездного вещества. Рассмотрены ограничения параметров звезды, вытекающие из различных физических требований.

Одна из наиболее сложных и важных задач в общей теории относительности - задача описания внутреннего строения различных звезд. Трудности расчета звездных моделей связаны как с нелинейностью самих уравнений Эйнштейна, так и со сложностью дополнительных уравнений, таких как уравнение состояния звездного вещества и уравнения выделения и переноса энергии в звездах.

Для моделей с тензором энергии-импульса (ТЭИ) идеальной паскалевой жидкости или более общими тензорами энергии-импульса одних только уравнений Эйнштейна недостаточно. Неизвестных функций оказывается больше, чем уравнений. Явный выбор некоторых из этих функций часто позволяет значительно упростить уравнения и обойти проблемы, связанные с уравнениями состояния и энерговыделения. На таком выборе основано большинство методов моделирования релятивистских звезд. Для излучающих звезд это – метод А.М.Баранова и Н.Н.Паклина [1] (BP-метод) и метод L.Herrera, J.Jimenez и G.I.Ruggeri (HJR-метод) [2]. Такие подходы позволяют получать точные нестатические решения уравнений Эйнштейна. Но в данной работе использован другой подход к моделированию звезд. Отказываясь от поиска точных решений в пользу приближенных, мы получаем возможность дополнять систему Эйнштейна условиями, более адекватными действительности.

Полная модель звезды должна описывать не только ее внутреннее строение, но и внешнее к звезде пространство, которое может быть заполнено наряду с гравитационным полем как излучением, так и другим типом материи. В связи с этим важным, но еще недостаточно изученным, является вопрос сшивки на поверхности модели ее внутренней и внешней частей. Одной из общепринятых процедур сшивки двух различных решений, описывающих пространства, разделенные некоторой поверхностью, является процедура Дармуа [3]. Удобное ее описание, алгоритмизированное для использования компьютерными аналитическими пакетами, можно найти в [4]. Справедливости ради следует упомянуть и сшивку по О'Брайну-Сингу [5], в ряде случаев совпадающей со сшивкой Дармуа, но менее общей. Для описания внешнего пространства в случае сферической симметрии можно использовать известные решения: Шварцшильда – для пустого пространства, Вайдья – для пространства с излучением и решения Райснера-Нордстрема и Вайдья-Райснера-Нордстрема – если звезда к тому же обладает и электрическим зарядом. В данной работе в качестве внешнего решения выбрано решение Вайдья, описываемое в излучательных координатах Бонди (u, r, θ, φ) метрикой

$$ds^2 = (1 - \frac{2M(u)}{r})du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

и тензором энергии-импульса высокочастотного неполяризованного излучения

$$T^{(rad)}_{\rho\sigma} = -\frac{\dot{M}}{4\pi r^2} l_\rho l_\sigma, \tag{2}$$

где u, r, θ, φ - соответственно временная, радиальная и угловые координаты; $M(u)$ - масса звезды; а l_ρ - радиальный светоподобный геодезичный вектор,

$$l_\rho l^\sigma = 0, \quad l_{\rho;\sigma} l^\sigma = 0. \tag{3}$$

Точкой здесь и далее обозначается производная по временной переменной u, а точкой с запятой – ковариантная производная. Для массы M, не зависящей от времени, метрика (1) превращается в метрику внешнего решения Шварцшильда. Сшивка решения Вайдья методом Синга с различными точными внутренними решениями

* © А.М.Баранов, Красноярский госуниверситет, 2003. E-mail: bam@lan.krasu.ru; С.Ф.Тегай, Красноярский госуниверситет, 2003. E-mail: tegai_s_f@inbox.ru.

для неидеальной жидкости исследуется в работах [1], [6]-[7], а методом Дармуа – в статьях [2] и [10]. Сшивка по Дармуа решений для идеальной жидкости с решением Вайдья при наличии на поверхности тонкой оболочки рассматривается в [11].

В настоящей работе мы выбираем в качестве внутреннего пространства-времени сферически-симметричное пространство с метрикой вида

$$ds^2 = e^{2\beta(u,r)}(1-\frac{2m(u,r)}{r})du^2 + 2e^{\beta(u,r)}dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{4}$$

обладающей двумя неизвестными функциями $\beta(u,r)$ и $m(u,r)$, которые будем искать в виде рядов по степеням безразмерной величины $\delta(u) = (R(u)\text{-}r)/R(u)$, где $R(u)$ – радиус звезды. Полученное в виде такого ряда решение достаточно точно описывает приповерхностный слой звезды, но плохо применимо к ее внутренним областям. Все вычисления производятся в системе единиц, в которой скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная равны единице. Уравнения Эйнштейна в такой системе единиц принимают вид

$$G_{\rho\sigma} = -8\pi T_{\rho\sigma}, \tag{5}$$

где $G_{\rho\sigma} = R_{\rho\sigma} - (1/2)\, g_{\rho\sigma} R$ – тензор Эйнштейна; $R_{\rho\sigma}$ – тензор Риччи; R – скалярная кривизна; $T_{\rho\sigma}$ – тензор энергии импульса.

1. Описание метода

Тензор энергии-импульса для внутренней части звезды выберем в виде

$$T_{\rho\sigma l} = T^{(fl)}_{\rho\sigma} + \frac{L_{in}(u,r)}{4\pi r^2} l_\rho l_\sigma + T^{(stress)}_{\rho\sigma}, \tag{6}$$

где $T^{(fl)}_{\rho\sigma} = (\mu + p)u_\rho u_\sigma - p g_{\rho\sigma}$ – ТЭИ идеальной паскалевой жидкости; μ – плотность энергии; p – давление; $u^\sigma = dx^\sigma/ds$ – 4-скорость; $u^\sigma u_\sigma = 1$; $L_{in}(u, r)$ – произвольная функция, задающая процесс энерговыделения внутри звезды;

$$T^{(stress)}_{\rho\sigma} = \xi(u,r)\gamma_{\rho\sigma} \tag{7}$$

– ТЭИ, отвечающий анизотропии, которая связана с прохождением излучения через среду и возникновением касательных напряжений [1]; $\gamma_{\rho\sigma}$ – это, по сути, метрика 2-сферы, так что $\gamma_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma = d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2$; $\xi(u, r)$ - произвольная функция.

Отметим, что сшивка производится нами в несопутствующей системе отсчета. В такой системе отсчета 4-скорость жидкости равна

$$u^\alpha = \frac{[1, v, 0, 0]}{\sqrt{(1-2m/r)e^\beta + 2ve^\beta}}, \tag{8}$$

где 3-скорость жидкости $v(u, r)$ не равна нулю, а на поверхности не равна скорости самой поверхности в отличие от [2], [10] и [12]. Другими словами, излучение генерируется, в том числе и за счет радиационной сублимации – превращения частиц жидкости на поверхности в излучение. Радиационная сублимация моделей с пространственно однородной плотностью рассмотрена в [7,8].

Уравнения Эйнштейна для ТЭИ (6) и метрики (4) принимают следующий вид:

$$\frac{\dot m}{r^2} - \frac{m'}{r^2}e^\beta(1-\frac{2m}{r}) + \frac{4\pi\mu(v + e^\beta(1-2m/r))^2}{2v + e^\beta(1-2m/r)} + \frac{4\pi p v^2}{2v + e^\beta(1-2m/r)} + \frac{8\pi L_{in}e^{-\beta}}{r\text{^}2} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{m'}{r^2} - \frac{4\pi\mu(v + e^\beta(1-2m/r))}{2v + e^\beta(1-2m/r)} - \frac{4\pi p v}{2v + e^\beta(1-2m/r)} = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\beta'}{r}e^{-\beta} - \frac{4\pi(\mu + p)}{2v + e^\beta(1-2m/r)} = 0; \tag{11}$$

$$rm'' + r^2 e^{-\beta}\dot\beta' - r^2(1-\frac{2m}{r})(\beta'' + \beta'^2) + 3rm'\beta' - (r+m)\beta' + pr^2 + \xi = 0. \tag{12}$$

Поверхность сшивки Σ задана уравнением $r = R(u)$. Координата u постулируется совпадающей со временем галилеева наблюдателя в пространстве Вайдья.

Условия соединения Дармуа состоят в непрерывности на Σ квадратичных форм

$$g_{ij}d\xi^i d\xi^j = \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^j}g_{\rho\sigma}d\xi^i d\xi^j \quad (13)$$

и

$$K_{ij}d\xi^i d\xi^j = \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^j}n_{\rho;\sigma}d\xi^i d\xi^j, \quad (14)$$

где ξ^i – координаты на Σ, в нашем случае равные (u, θ, φ), а n_ρ - единичный вектор нормали к Σ. Для рассматриваемой задачи из этих условий следуют, во-первых, непрерывность компонент метрического тензора, во-вторых, одно уравнение на производные неизвестных функций $m(u, r)$ и $\beta(u, r)$ на поверхности:

$$\dot{m}|_R + (3R\dot{R} + 1 - \frac{2M}{R})m'|_R + R\dot{R}\dot{\beta}|_R - R((1-\frac{2M}{R})^2 + 3(1-\frac{2M}{R})\dot{R} + \dot{R}^2)\beta'|_R = 0. \quad (15)$$

Это уравнение вместе с уравнениями Эйнштейна (9)-(11) позволяют найти значения давления и первых производных метрических коэффициентов на поверхности:

$$p_R = \frac{\zeta\Delta L}{8\pi R^2}; \quad (16)$$

$$\dot{m}\big|_R = 2\pi\zeta\mu_R R^2\dot{R}^2 + \frac{1}{2}(\zeta\Delta L - 8\pi\mu_R R^2)\dot{R} - L_{out}; \quad (17)$$

$$m'\big|_R = -2\pi\zeta\mu_R R^2\dot{R} - \frac{1}{2}(\zeta\Delta L - 8\pi\mu_R R^2); \quad (18)$$

$$\dot{\beta}\big|_R = -2\pi\zeta\mu_R R\dot{R}; \quad (19)$$

$$\beta'\big|_R = 2\pi\zeta\mu_R R, \quad (20)$$

здесь $\Delta L = L_{out}-L_{in}|_R$; $L_{out} = -dM/du$ – светимость звезды, а ζ определяется из

$$\frac{2}{\zeta} = 1 - \frac{2M}{R} + 2\dot{R} + \frac{\Delta L}{4\pi\mu_R R^2} \quad (21)$$

Как видно из приведенных выше соотношений анизотропия $\xi(u, r)$ не входит в эти выражения.

Так как вторые производные метрических коэффициентов, а также первые производные давления и плотности входят в уравнения Эйнштейна линейным образом, все искомые производные на поверхности связаны линейными уравнениями, и могут быть легко найдены. Приближенное решение записывается в виде ряда Тэйлора по степеням малой безразмерной величины $\delta(u) = (R(u)-r)/R(u)$:

$$m(u,r) \approx M(u) - R(u)m'(u,r)\big|_R\delta(u) + \frac{1}{2}R(u)^2 m''(u,r)\big|_R\delta(u)^2; \quad (22)$$

$$\beta(u,r) \approx -R(u)\beta'(u,r)\big|_R\delta(u) + \frac{1}{2}R(u)^2\beta''(u,r)\big|_R\delta(u)^2; \quad (23)$$

$$\mu(u,r) \approx \mu(u,r)\big|_R - R(u)\mu'(u,r)\big|_R\delta(u). \quad (24)$$

Это решение зависит от четырех произвольных функций $L_{in}(u, r)$, $\xi(u, r)$, $R(u)$ и $M(u)$, а также от выбора уравнения состояния. Скорость жидкости на поверхности

$$v_R = \dot{R} + \frac{\Delta L}{8\pi\mu_R R^2} \quad (25)$$

будет равна скорости самой поверхности только при $\Delta L = 0$. Это означает, что за счет сублимации поверхность движется отдельно от образующих ее частиц (как геометрическая граница, а не как физическая), в частности, dR/du может по модулю превышать скорость света.

2. Модель с постоянным радиусом и постоянной светимостью

Рассмотрим результаты, которые дает описанный метод. В связи с тем, что плотность приповерхностного слоя, в отличие от центральных частей звезды, невелика, возьмем для модельного описания вещества в этом слое политропное уравнение состояния

$$p = p_0 (\frac{\mu}{\mu_0})^{\gamma}. \tag{26}$$

Произвольные функции выберем в простейшем виде: R, ΔL и L_{out} постоянны и положительны, следовательно, масса звезды убывает линейно:

$$M = M_0 - L_{out} u. \tag{27}$$

Предположения постоянства радиуса и светимости звезды применимы к любой излучающей модели, но только в достаточно малый промежуток времени.

В этом случае выражения для производных (17)-(20) принимают более простой вид:

$$\dot{m}\big|_R = -L_{out} < 0; \tag{28}$$

$$m'\big|_R = -4\pi (p_R - \mu_R) R^2 > 0; \tag{29}$$

$$\dot{\beta}\big|_R = 0; \tag{30}$$

$$\beta'\big|_R = \frac{16\pi^2 \mu_R p_R R^3}{\Delta L} > 0. \tag{31}$$

Считая плотность μ_R параметром и выразив через нее время u:

$$u = \frac{1}{L_{out}} (-\frac{R\chi}{2} - \frac{\Delta L}{8\pi \mu_R R} + \frac{\Delta L}{8\pi p_R R}), \tag{32}$$

где $\chi = 1\text{-}2M_0/R$, получим параметрическую зависимость всех искомых функций от времени. Времени $u = 0$ соответствует начальное значение поверхностной плотности μ_R, равное

$$\mu_R = \frac{p_0 \Delta L}{\Delta L - 4\pi\chi p_0 R^2}. \tag{33}$$

Полная производная по времени плотности на поверхности равна

$$\frac{d\mu_R}{du} = \frac{8\pi R L_{out}}{\Delta L} \cdot \frac{p_R^2 \mu_R^2}{p_R^2 - v_s^2 \mu_R^2}, \tag{34}$$

где $v_s = (dp/d\mu)_R$ – скорость звука на поверхности. Она отрицательна, тогда как полные производные по времени функций $m'|_R$ и $\beta'|_R$ положительны.

Так как для постоянных радиуса и светимости имеет смысл рассматривать только малые промежутки времени, интересна зависимость характеристик звезды не от времени, а от параметров модели M_0, L_{out}, R, ΔL, p_0, γ и $\xi(0, R)$, а также возможные ограничения этих параметров.

Первое ограничение возникает из требования ограниченности и неотрицательности начальной плотности на поверхности:

$$\Delta L - 4\pi\chi p_0 R^2 > 0. \tag{35}$$

Второе ограничение следует из физического условия убывания плотности звезды от центра к поверхности, а именно, производная μ' должна быть не больше нуля везде внутри звезды, в том числе и на поверхности. В полученном приближении эта производная зависит только от времени.

Пусть теперь $p_0 = (\Delta L/4\pi\chi R^2)(1\text{-}\delta p)$, где δp – произвольно малая положительная величина, так что условие (35) выполняется. Тогда знак $\mu'|_R$ совпадает в первом приближении по δp со знаком выражения

$$(\chi(1-\chi) + 2L_{out})\gamma + \chi(1-\chi) - 6L_{out})\delta p, \tag{36}$$

то есть для $\mu'|_R < 0$

$$\gamma > \frac{\chi(1-\chi) - 6L_{out}}{\chi(1-\chi) + 2L_{out}} \delta p.$$

Это неравенство выполняется для любых $\delta p < 1$, так как для физически приемлемых политропных уравнений состояния $\gamma > 1$. Значит, всегда можно подобрать достаточно малое относительное отклонение начального давления от критической величины $\Delta L/4\pi\chi R^2$, при котором плотность вблизи поверхности будет убывающей. Однако при более сильном отклонении выражения (35) от нуля численные вычисления показывают, что производная $\mu'|_R$ становится положительной (рис. 1). То есть условия неотрицательности плотности и неположительности ее радиальной производной противоположны друг другу, и параметры модели могут принимать значения только в определенном «коридоре» значений.

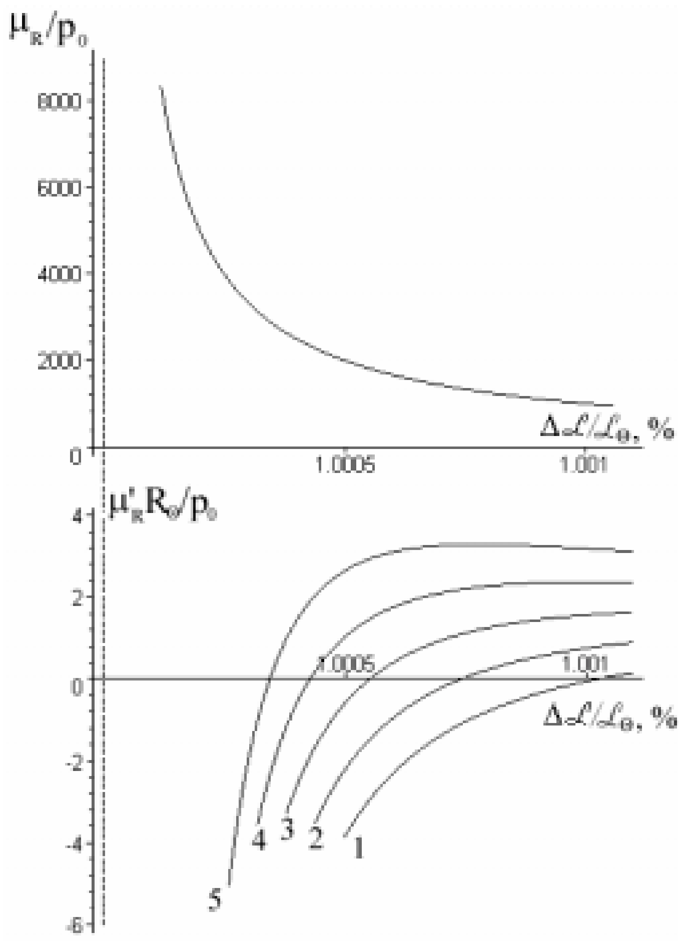

Рис. 1. Плотность энергии и ее первая производная на поверхности в зависимости от параметров $\xi(0, R)$ и ΔL: 1- $\xi(0, R) = 0$; 2- $\xi(0, R) = L_\Theta \cdot 10^{-33}$; 3- $\xi(0, R) = 2L_\Theta \cdot 10^{-33}$; 4- $\xi(0, R) = 3L_\Theta \cdot 10^{-33}$; 5- $\xi(0, R) = 4L_\Theta \cdot 10^{-33}$

Мы привели здесь новый метод моделирования приповерхностного слоя излучающей звезды, основанный на сшивке по Дармуа внутреннего сферически-симметричного пространства общего вида с внешним пространством Вайдья. Метод позволяет исследовать взаимосвязь таких интегральных характеристик звезд, как масса, радиус и светимость со значениями плотности, давления и метрических коэффициентов вблизи поверхности этих звезд для различных уравнений состояния и энерговыделения. Полученные в виде рядов по степеням $(R(u)\text{-}r)/R(u)$ выражения для компонент метрического тензора можно рассматривать как приближенное решение уравнений Эйнштейна. Для случая постоянной светимости и постоянного радиуса нам удалось при помощи пакета аналитических вычислений "Maple" получить значения вторых производных метрических коэффициентов на поверхности и линейное приближение для давления и плотности звезды. Были найдены ограничения на параметры звезды, вытекающие из неотрицательности и невозрастания плотности. Эти ограничения должны быть соблюдены в каждый момент времени и для моделей звезд с переменными радиусом и светимостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов А.М., Паклин Н.Н. О внутреннем источнике решения Вайдья//Известия вузов (Физика). - 1988. - №3. - С. 36.
2. Herrera L., Jimenez J., Ruggeri G.I. Evolution of radiating fluid spheres in General Relativity//Phys. Rev. D, **22**, 10 (1980) 2305.
3. Darmois G. Les equations de la gravitation Einsteinienne//Memorial des science Mathematiques, Fascicule XXV. Gauthier-Villairs. Paris, 1927
4. Musgrave P., Lake K. Junctions and thin shells in general relativity using computer algebra I: The Darmois-Israel Formalism // Class. Quantum Grav., **13** (1996) 1885—1900.
5. Синг Дж.Л. Общая теория относительности. - М.: Иностр. лит., 1963.
6. Баранов А.М., Кокшаров А.И., Паклин Н.Н. Эволюция излучающих релятивистских источников. 1. Непаскалевый тензор энергии-импульса. Обобщение однородной модели//Краснояр. гос. ун-т. - Красноярск, 1989.- 15 с. - Деп. ВИНИТИ АН СССР 6.12.89, №7226 - В 89.
7. Баранов А.М., Кокшаров А.И., Паклин Н.Н. Эволюция излучающих релятивистских источников. 2. Шварцшильдоподобная модель//Краснояр. гос. ун-т. - Красноярск, 1989.- 17 с. - Деп. ВИНИТИ АН СССР 6.12.89, №7197 - В 89.
8. Баранов А.М., Паклин Н.Н. Радиационная сублимация однородной релятивистской модели звезды //Известия вузов (Физика). – 1994. - № 10. – С.13-17.
9. Баранов А.М., Паклин Н.Н. Эволюция излучающих релятивистских источников. 3. Обобщение IV решения Толмена//Краснояр. гос. ун-т. - Красноярск, 1990.- 9 с. - Деп. ВИНИТИ АН СССР 2.07.90, №3704 - В 90.
10. Fayos F., Senovilla J.M.M., Torres R. Spherically symmetric models for charged radiating stars and voids: Theoretical approach//arXiv: gr-qc/0206076

11. Villas da Rocha J.F., Anzhong Wang, Santos N.O. Gravitational Collapse of Perfect Fluid//Phys.Lett., **A255** (1999) 213-220
12. Herrera L., Nunes L.A. Evolution of radiating spheres in general relativity: a seminumerical approach.- Merida: Universidad de Los Andes, 1990.

MODEL OF RADIATING STAR SUBSURFACE

A.M.Baranov, S.F.Tegai

The modeling method of radiating stars based on the Darmois junction between some internal spherical space and the Vaidya external space is proposed. We choose the sphere of variable radius R(u) as a surface of matching. The velocity of the stellar surface as against other authors using the Darmois formalism is not equal to the velocity of the star matter on that surface. The approximate solution the Einstein equations has been found as Taylor's series on degrees R(u)-r. Coefficients of the series have be found from the junction conditions and the Einstein equations which are considered on the surface. The case with the constant radius and luminosity has been discussed more in detail. The second derivatives of metric coefficients and the first derivatives of pressure and density of star substance are obtained. The restrictions of the star parameters the following from different physical requirements have been studied.