МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.217

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ КАТАСТРОФ: ЗАГРЯЗНЕНИЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ[1]

Ю.В. Кондратенко, А.А. Новоселов*

Пусть имеется некоторый процесс загрязнения окружающей среды. Рассмотрим количество отходов как функцию от времени. Поскольку выбрасываемое количество отходов случайно, то имеем случайный процесс.

В работе решаются следующие задачи: нахождение точек равновесия системы, финальных вероятностей состояний системы, а также вероятности того, что через n лет количество отходов в среде будет принадлежать заданному интервалу. В работе строится математическая модель, основанная на простой цепи Маркова, и исследуется поведение системы.

В последнее время все чаще поднимаются вопросы об экологических проблемах. Не секрет, что в погоне за прибылью предприятия не заботятся об очищении своих отходов, в результате чего состояние природы постоянно ухудшается. Интересно знать, во что превратится окружающая среда через несколько лет, если процесс загрязнения не изменится.

Данная проблема уже рассматривалась Р. Г. Хлебопросом в [1], где был предложен метод фазовых портретов для исследования динамики экологического ущерба, который позволял найти точки равновесия системы. В предположении, что выбросы отходов детерминированы и постоянны, такой модели достаточно. Но в реальной жизни частота и степень загрязнения природы произвольна.

В работе рассматривается метод фазовых портретов, затем строится марковская цепь, описывающая явление, и вычисляются такие числовые характеристики, как предельное распределение, среднее количество отходов за некоторый интервал времени, вероятность попадания системы в "опасные" состояния и среднее время непрерывного пребывания системы в конкретном состоянии.

Построение математической модели

Будем исследовать количество загрязнителя в среде с течением времени. Для начала отметим несколько ограничений на условие задачи.

1. Фиксируем пункт местности и, следовательно, свойства среды.
2. Рассматриваем определенную среду (почва, воздух, вода).
3. Под загрязнителем будем понимать определенный вид отходов (углекислый газ, свинец и т. д.).
4. Будем измерять загрязнитель в некоторых условных единицах.

[1]При поддержке проекта Т0270 по направлению 2.7 на этапе 2002

На деструкцию (разрушение) отходов влияет погода, перемещение почвенных вод и т. д., при построении модели пренебрежем и этим. Также будем считать, что свойства среды не изменяются на рассматриваемом промежутке времени. В дальнейшем под словом “год” понимается период времени, сравнимый с характерным временем деструкции загрязнения.

Введем некоторые обозначения.

Будем называть окружающую среду системой. Обозначим через x_n состояние системы на n-м году жизни, характеризующее количество загрязнителя в среде.

Пусть $f(x)$ — фазовая функция деструкции данной среды (рис. 1), т. е. $f(x)$ — это количество загрязнителя в среде в следующем году, если сейчас оно равно x. Вид функции обоснован некоторыми экологическими предположениями [1, с. 50].

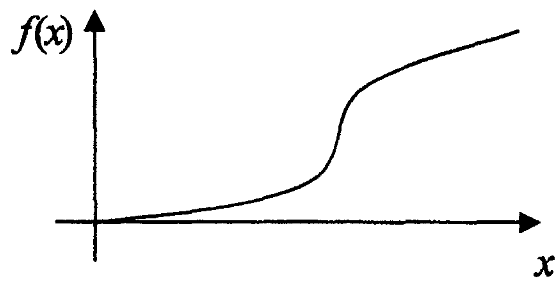

Рис. 1. Фазовая функция деструкции среды

Данная функция находится из наблюдений за средой после однократного внесения загрязнения и задается таблицей. Одним из методов аппроксимации получим непрерывный аналог данной функции, который и будем использовать в дальнейшем.

В [1, с. 58] было показано, что если d — среднегодовой выброс отходов, то справедливо следующее соотношение:

$$x_{n+1} = f(x_n) + d. \tag{1}$$

Здесь количество загрязнителя в среде в конце $n+1$ года будет определяться суммой неразрушенного остатка с прошлого года и среднегодового выброса d в течение $n+1$ года, полностью перенесенного на конец этого года.

Для дальнейшего исследования особый интерес представляют точки пересечения графика функции $x_{n+1}(x_n)$ с биссектрисой координатного угла: т. 1 и т. 2 — точки устойчивого равновесия, а т. 3 - неустойчивого (рис. 2). При небольших отклонениях от точек 1 и 2 система снова возвращается в них.

В зависимости от величины d вид фазового портрета будет одним из трех (рис. 3):

I. Случай, когда $d \in [0, r_2 - f(r_2))$. Тогда мы имеем только одну устойчивую точку с меньшим значением.

II. Случай, когда $d \in [r_1 - f(r_1), \infty)$. Здесь мы снова имеем только одну устойчивую точку, но уже с большим значением.

III. Случай, когда $d \in [r_2 - f(r_2), r_1 - f(r_1))$, дает нам две устойчивых точки и одну неустойчивую.

Причем r_1 и r_2 определяются из условий: значение производной $f(x)$ слева от точки r_1 меньше 1, а справа больше 1, аналогично, слева от r_2 — производная больше 1, а справа меньше 1.

Случай II свидетельствует об экологическом бедствии в районе, т. к. если выброс отходов не изменится, то система уже никогда не перейдет в устойчивое равновесие с меньшим значением (на рис. 2 это точка 1).

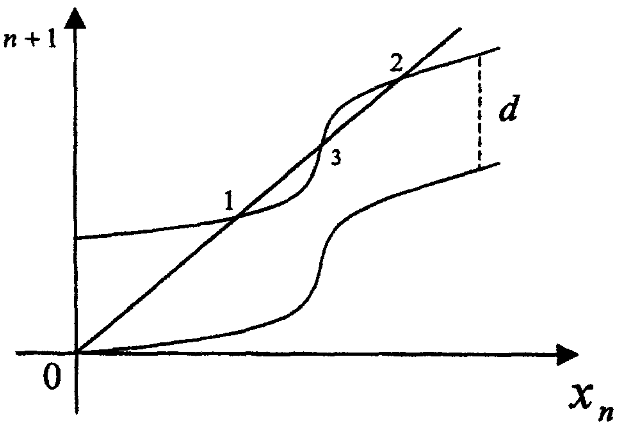

Рис. 2. Фазовая функция среды при регулярном выбросе d

На самом деле величина d редко постоянна, поскольку выбросы предприятия колеблются и, вообще говоря, случайны.

Пусть ξ — неотрицательная дискретная случайная величина, характеризующая количество загрязнения, выбрасываемого предприятием за год. Из специфики предприятия нам известно ее распределение $F_\xi(x)$.

Договоримся, что количество загрязнителя в среде изменяется дискретно с шагом h и конечно. Тогда наша система может находиться в течение одного года в одном из состояний $y_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. Состояние y_i есть количество загрязнителя в среде.

Заменим теперь d на случайную величину ξ и рассмотрим получившуюся модель.

$$x_{n+1} = f(x_n) + \xi. \tag{2}$$

Из (2) видно, что состояние системы на $n+1$ шаге зависит только от состояния на n-м шаге. Значит, данный случайный процесс можно описать простой цепью Маркова. Полная вероятностная картина изменения состояний системы описывается матрицей перехода P.

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N0} & p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix},$$

где p_{ij} — это вероятность перехода системы из состояния y_i в y_j, $\sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij} = 1$, $i = 0, \dots, N$.

Найдем вероятности перехода p_{ij}.

$$p_{ij} = \mathbf{P}(x_{n+1} = y_j | \ x_n = y_i) = \mathbf{P}(f(x_n) + \xi = y_j | x_n = y_i) =$$
$$= \mathbf{P}(f(y_i) + \xi = y_j) = \mathbf{P}\left(f(y_i) + \xi - \frac{h}{2} < y_j \leqslant f(y_i) + \xi + \frac{h}{2}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(y_j - f(y_i) - \frac{h}{2} < \xi \leqslant y_j - f(y_i) + \frac{h}{2}\right) =$$
$$= F_\xi\left(y_j - f(y_i) + \frac{h}{2}\right) - F_\xi\left(y_j - f(y_i) - \frac{h}{2}\right).$$

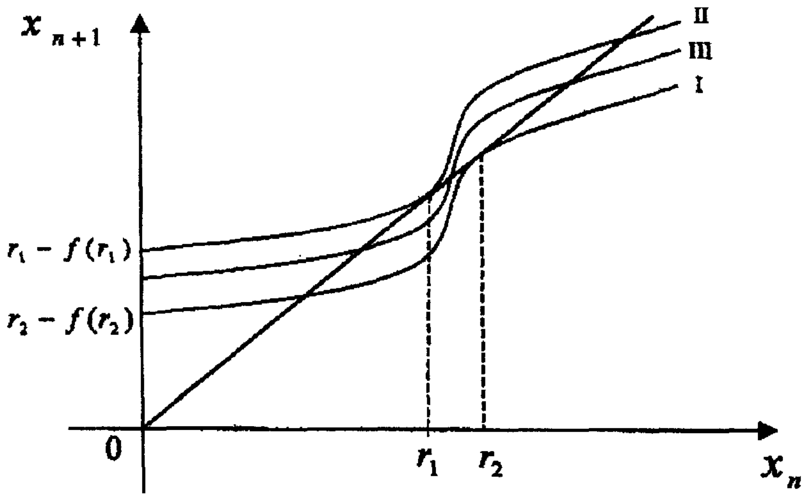

Рис. 3. Три вида фазовых портрета среды

Обозначим через P_n матрицу перехода на n-м шаге. Известно, что $P_n = P^n$. Таким образом, чтобы узнать распределение x_n, если сейчас система находится в состоянии y_k, необходимо в матрице P^n взять k-ю строку. Тогда среднее количество загрязнителя в среде за n лет будет $\sum\limits_{j=0}^{N} p_{kj}^{(n)} y_j$.

Вероятность того, что количество загрязнителя в среде через n лет будет принадлежать интервалу (a_1, a_2), есть

$$\mathbf{P}(a_1 < x_n < a_2) = \sum_{j:\, a_1 < y_j < a_2} p_{kj}^{(n)}. \qquad (3)$$

Состояния $y_i > r_2$ соответствуют экологическому бедствию. По формуле (3) легко посчитать $\mathbf{P}(x_n > r_2)$.

Найдем теперь такую характеристику $\bar{t}_j$, как среднее время непрерывного пребывания системы в состоянии y_j, т. е. сколько в среднем лет подряд система находится в одном и том же состоянии y_j. Обозначим через $P^* = \lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ матрицу финальных вероятностей, в которой все вероятности в одном столбце равны, т. е. $p_{ij}^* = p_j^*$, $i = 0, \ldots, N$.

Тогда

$$\bar{t}_j = \sum_{k=1}^{\infty} k p_j^{*k} = \frac{p_j^*}{(1 - p_j^*)^2}.$$

Заключение

В данной работе была рассмотрена проблема загрязнения окружающей среды одним видом отходов. С помощью простой цепи Маркова построена модель, позволяющая давать вероятностный прогноз состояния среды через n лет, находить среднее количество отходов в среде за этот промежуток времени и среднее время непрерывного пребывания системы в данном состоянии. Тем не менее, остается нерешенным вопрос о том, как следует изменить объем выбросов, чтобы система за некоторое время перешла в заданное состояние.

Список литературы

[1] Хлебопрос Р.Г. *Природа и общество: модели катастроф*/ Р.Г.Хлебопрос, А.И.Фет. – Новосибирск: Сибирский этнограф, 1999. – 344 с.

[2] Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*/ Б.В.Гнеденко. – М.: Наука, 1988. – 448 с.