УДК 517.55

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ n АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОТ n НЕИЗВЕСТНЫХ С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

В.А. Степаненко*

В настоящей статье результаты Меллина и Антиповой обобщаются на случай общей системы n алгебраических уравнений от n неизвестных. Сначала при определенных предположениях получена формула для решения системы, затем непосредственной подстановкой в исходную систему доказывается, что полученная формула является ее решением в классе формальных степенных рядов.

В 1921 году Г.Меллин [1] получил формулу для решения общего алгебраического уравнения, приведя его к виду

$$y^m + x_1 y^{m_1} + \ldots + x_p y^{m_p} - 1 = 0. \tag{1}$$

Для решения $y(x) = y(x_1, \ldots, x_p)$ Г.Меллин привел две формулы: интегральное представление в виде интеграла Меллина-Барнса [2] и разложение в степенной ряд, являющийся гипергеометрическим по Горну [3]: отношения соседних коэффициентов ряда — рациональные функции от переменных суммирования ряда.

Достаточно исследовать основную ветвь $y(x)$ вблизи $x = 0$ с условием $y(0) = 1$, все остальные решения получаются из основного по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon_j y(\varepsilon_j^{m_1} x_1, \ldots, \varepsilon_j^{m_p} x_p),$$

где ε_j - первообразные корни из единицы степени m (то есть $\varepsilon_j^m = 1$) (см. также работы Б. Штурмфельса [4], А.Ю Семушевой и А.К. Циха [5]). В статье [5] изучены аналитические продолжения решения $y(x)$ и области сходимости рядов Лорана-Пюизо для решений $y_j(x)$.

Затем И.А. Антипова [6], исследуя задачу о представлении общих алгебраических функций в виде суперпозиции алгебраических функций меньшего числа переменных, получила основное решение для нижнетреугольной системы алгебраических уравнений, когда первое уравнение зависит только от первой неизвестной y_1, второе - от первых двух y_1, y_2 и т.д., последнее n-е зависит от всех n переменных $y_1, \ldots, y_n$.

В настоящей статье результаты Меллина и Антиповой обобщаются на случай общей системы n алгебраических уравнений от n неизвестных. Сначала при определенных предположениях на показатели степеней слагаемых системы и на сходимость прямого и обратного преобразований Меллина получаем формулу для $y^\mu(x) = y_1^{\mu_1}(x) \cdot \ldots \cdot y_n^{\mu_n}(x)$, затем непосредственной подстановкой мономов y^μ в исходную систему доказываем, что полученная формула является её решением в классе формальных степенных рядов.

Рассмотрим произвольную систему n алгебраических уравнений от n переменных $y_1, \ldots, y_n$ с произвольным числом слагаемых в каждом уравнении, с произвольными

[1]Работа поддержана грантом Президента поддержки ведущих научных школ НШ-1212.2003.1

степенями входящих в нее многочленов с буквенными коэффициентами. Деля каждое i-е уравнение на свободный член с минусом, вынося моном, содержащий только степень y_i на первое место и заменяя y_i на новое переменное (которое мы обозначим также y_i), приводим исходную систему к *нормальному виду:*

$$y_i^{m_i} + \sum_{k=1}^{p_i} x_{m_{1k}^i \dots m_{nk}^i} y_1^{m_{1k}^i} \cdot \ldots \cdot y_n^{m_{nk}^i} - 1 = 0, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где p_i - число слагаемых в i-м уравнении (кроме первого и последнего), $m_{ik}^i < m_i \quad (k = 1, \ldots, p_i)$, $\quad x_{m_{1k}^i \dots m_{nk}^i}$ - произвольные буквенные коэффициенты.

Вначале мы намерены получить прямое преобразование Меллина монома для y^μ (в частности, y_i при векторе $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, стремящемся к $(0, \ldots, 0, 1_{i\text{-ое место}}, 0, \ldots, 0)$)

$$M[y^\mu](u) = \int\limits_{R_+^{|p|}} y^\mu \prod_{i=1}^{n} \prod_{s=1}^{p_i} (x_{M_s^i})^{u_{M_s^i} - 1} \, dx, \tag{3}$$

где $|p| = p_1 + \ldots + p_n$, M_s^i—сложный мультииндекс: $M_s^i = m_{1s}^i \ldots m_{ns}^i$, $dx = dx_{M_1^1} \wedge \ldots \wedge dx_{M_{p_1}^1} \wedge \ldots \wedge dx_{M_1^n} \wedge \ldots \wedge dx_{M_{p_n}^n}$.

Затем к $M[y^\mu](u)$ применяем обратное преобразование Меллина на основе метода разделяющих циклов А.К. Циха [7], получаем

$$y_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\mu_n} = \frac{1}{(2\pi i)^{|p|}} \int\limits_{\gamma + iR^{|p|}} M[y^\mu](u) \prod_{i=1}^{n} \prod_{s=1}^{p_i} (x_{M_s^i})^{-u_{M_s^i}} \, du, \tag{4}$$

где $du = du_{M_1^1} \wedge \ldots \wedge du_{M_{p_1}^1} \wedge \ldots \wedge du_{M_1^n} \wedge \ldots \wedge du_{M_{p_n}^n}$.

Одним из результатов статьи является

Теорема 1. *При условии $m_i > m_{jk}^i$ в (2) и сходимости интегралов (3) и (4) для любого вектора $\mu \in R_+^n$ функция $y^\mu(x) = y_1^{\mu_1}(x) \ldots y_n^{\mu_n}(x)$ задаётся следующим рядом неконфлуэнтного гипергеометрического типа :*

$$y^\mu = \sum_{\substack{k_1^1 \geqslant 0, \ldots, k_{p_1}^1 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_1^n \geqslant 0, \ldots, k_{p_n}^n \geqslant 0}} \frac{(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{p_j} k_s^j}}{k_1^1! .. k_{p_1}^1! ... k_1^n! .. k_{p_n}^n!} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{p_\lambda} m_{js}^\lambda k_s^\lambda)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i k_s^i - \sum\limits_{r=1}^{p_j} k_r^j + 1)} \times$$

$$(\prod_{j=1}^{n} (\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{s=1}^{p_\lambda} m_{js}^\lambda k_s^\lambda) + \sum_{q=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n} \frac{(-1)^q}{m_{i_1} \ldots m_{i_q}} \sum_{j_1=1}^{p_{i_1}} \cdots \sum_{j_q=1}^{p_{i_q}} \begin{vmatrix} m_{i_1 j_1}^{i_1} & \ldots & m_{i_q j_1}^{i_1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ m_{i_1 j_q}^{i_q} & \ldots & m_{i_q j_q}^{i_q} \end{vmatrix} \times$$

$$((\frac{\mu_1}{m_1} + \frac{1}{m_1} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{s=1}^{p_\lambda} m_{1s}^\lambda k_s^\lambda) \ldots k_{j_1}^{i_1} \ldots k_{j_q}^{i_q} \ldots (\frac{\mu_n}{m_n} + \frac{1}{m_n} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{s=1}^{p_\lambda} m_{ns}^\lambda k_s^\lambda))) \prod_{t=1}^{n} \prod_{s=1}^{p_t} x_{M_s^t}^{k_s^t} \tag{5}$$

Доказательство. В интеграле (3) произведем замену переменных:

$$y_i = \tau_i^{-\frac{1}{m_i}}, \quad x_{M_k^i} = \xi_{M_k^i} \cdot \prod_{s=1}^{n} \tau_s^{\frac{m_{sk}^i}{m_s} - \delta_s^i}, \quad \tau_i = 1 + \sum_{k=1}^{p_i} \xi_{M_k^i} \quad (\delta_s^i \text{ -- символ Кронекера}). \tag{6}$$

В новых переменных ξ имеем:

$y_i = (1 + \sum\limits_{k=1}^{p_i} \xi_{M_k^i})^{-\frac{1}{m_i}}, \quad x_{M_k^i} = \xi_{M_k^i}(1 + \sum\limits_{k=1}^{p_1} \xi_{M_k^1})^{\frac{m_{1k}^i}{m_1}} \cdot \ldots \cdot (1 + \sum\limits_{k=1}^{p_n} \xi_{M_k^n})^{\frac{m_{nk}^i}{m_n}}$.

Якобиан перехода от старых переменных x к новым ξ

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| = \left|\frac{\partial x_{M_k^i}}{\partial \xi_{M_r^j}}\right| = {}_j\square_{kr}^i = \delta_j^i \delta_r^k \prod_{s=1}^{n} \tau_s^{\frac{m_{sk}^i}{m_s} - \delta_s^i} + (\frac{m_{jk}^i}{m_j} - \delta_j^i)\xi_{M_k^i} \prod_{s=1}^{n} \tau_s^{\frac{m_{sk}^i}{m_s} - \delta_s^i - \delta_s^j}$$

имеет блочную структуру:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| = \begin{vmatrix} {}_1\square^1 & \ldots & {}_n\square^1 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ldots & {}_j\square^i & \ldots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ {}_1\square^n & \ldots & {}_n\square^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_1\square_{kr}^1 & \ldots & {}_n\square_{kr}^1 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ldots & {}_j\square_{kr}^i & \ldots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ {}_1\square_{kr}^n & \ldots & {}_n\square_{kr}^n \end{vmatrix},$$

где i, j - номера блок-строки и блок-столбца якобиана, а k, r - номера строки и столбца в каждом блоке.

Вынесем из каждой k-й "сквозной" строки i-й блок-строки $({}_1\square_{kr}^i, \ldots, {}_n\square_{kr}^i)$ элемент $\prod\limits_{s=1}^{n} \tau_s^{\frac{m_{sk}^i}{m_s} - \delta_s^i}$ - первое слагаемое диагонального элемента, находящегося на главной диагонали всего якобиана, тогда из i-й блок-строки вынесется множитель

$$\prod_{k=1}^{p_i}\prod_{s=1}^{n} \tau_s^{\frac{m_{sk}^i}{m_s} - \delta_s^i} = \tau_1^{\frac{1}{m_1}\sum\limits_{k=1}^{p_i} m_{1k}^i} \ldots \tau_i^{\frac{1}{m_i}\sum\limits_{k=1}^{p_i} m_{ik}^i - p_i} \ldots \tau_n^{\frac{1}{m_n}\sum\limits_{k=1}^{p_i} m_{nk}^i} = \tau_i^{-p_i} \prod_{s=1}^{n} \tau_s^{\frac{1}{m_s}\sum\limits_{k=1}^{p_i} m_{sk}^i} .$$

Вынося из каждой строки якобиана "минус единицу" и вспоминая формулу (6) $\tau_i = 1 + \sum\limits_{k=1}^{p_i} \xi_{M_k^i}$, получаем перед всем якобианом множитель:

$$\frac{(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1 + \sum\limits_{k=1}^{p_j} \xi_{M_k^j})^{p_j - \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_i} m_{jk}^i}} . \tag{7}$$

Обозначим штрихом блоки после указанного вынесения. Элементы λ-й строки диагонального ${}_i\square^i$ и недиагонального ${}_j\square^i$ $(i \neq j)$ блоков соответственно равны:

${}_i'\square_{\lambda\mu}^i = (1 - \frac{m_{i\lambda}^i}{m_i})\xi_{M_\lambda^i}\tau_i^{-1} - \delta_\mu^\lambda \quad (\lambda, \mu = 1, \ldots, p_i)$, и

${}_j'\square_{\lambda\mu}^i = -\frac{m_{j\lambda}^i}{m_j}\xi_{M_\lambda^i}\tau_j^{-1} \quad (\lambda = 1, \ldots, p_i\, ;\, \mu = 1, \ldots, p_j)$.

В каждом j-м блоке-столбце ${}'_j\Box$ изо всех столбцов, начиная со второго, вычтем первый столбец ${}'_j\Box_{\lambda 1}$ $(\lambda = 1,\dots,p_i)$, получим общий вид диагонального ${}'_i\Box^i$ и недиагонального ${}'_j\Box^i$ $(j \neq i)$ блоков:

$$
{}'_i\Box^i = \begin{pmatrix}
(1-\frac{m^i_{i1}}{m_i})\xi_{M^i_1}\tau_i^{-1}-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
(1-\frac{m^i_{i2}}{m_i})\xi_{M^i_2}\tau_i^{-1} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
(1-\frac{m^i_{i3}}{m_i})\xi_{M^i_3}\tau_i^{-1} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots \\
(1-\frac{m^i_{ip_i}}{m_i})\xi_{M^i_{p_i}}\tau_i^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -1
\end{pmatrix},
$$

$$
{}'_j\Box^i = \begin{pmatrix}
-\frac{m^i_{j1}}{m_i}\xi_{M^i_1}\tau_j^{-1} & 0 & \dots & 0 \\
-\frac{m^i_{j2}}{m_i}\xi_{M^i_2}\tau_j^{-1} & 0 & \dots & 0 \\
\ddots & \ddots & \dots & \ddots \\
-\frac{m^i_{jp_i}}{m_i}\xi_{M^i_{p_i}}\tau_j^{-1} & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix},
$$

в блоке ${}'_i\Box^i$ p_i строк и p_i столбцов, а в ${}'_j\Box^i$ $(j \neq i)$ p_i строк и p_j столбцов.

В каждой i-й блок-строке ${}'\Box^i$ прибавим к первой ${}'\Box^i_{1\mu}$ $(\mu 1,\dots,p_s$, $s = i$ для диагональных и $s = j$ для недиагональных блоков) все остальные строки, начиная со второй, тогда

$$
{}''_i\Box^i_{11} = \Big(\sum_{k=1}^{p_i}\xi_{M^i_k} - \sum_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{ik}}{m_i}\xi_{M^i_k}\Big)\tau_i^{-1} - 1 = \Big(\tau_i - 1 - \sum_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{ik}}{m_i}\xi_{M^i_k}\Big)\tau_i^{-1} - 1,
$$

так как по (6) $\sum\limits_{k=1}^{p_i}\xi_{M^i_k} = \tau_i - 1$,

$$
{}''_j\Box^i_{11} = -\Big(\sum_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{jk}}{m_i}\xi_{M^i_k} + \delta^i_j\Big)\tau_j^{-1}.
$$

Вид блоков становится таким:

$$
{}''_i\Box^i = \begin{pmatrix}
-(1+\sum\limits_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{ik}}{m_i}\xi_{M^i_k})\tau_i^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
(1-\frac{m^i_{i2}}{m_i})\xi_{M^i_2}\tau_i^{-1} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
(1-\frac{m^i_{i3}}{m_i})\xi_{M^i_3}\tau_i^{-1} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots \\
(1-\frac{m^i_{ip_i}}{m_i})\xi_{M^i_{p_i}}\tau_i^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -1
\end{pmatrix},
$$

$$
{}''_j\Box^i = \begin{pmatrix}
-(\sum\limits_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{jk}}{m_j}\xi_{M^i_k})\tau_j^{-1} & 0 & \dots & 0 \\
-\frac{m^i_{j2}}{m_j}\xi_{M^i_2}\tau_j^{-1} & 0 & \dots & 0 \\
\ddots & \ddots & \dots & \ddots \\
-\frac{m^i_{jp_i}}{m_j}\xi_{M^i_{p_i}}\tau_j^{-1} & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}, \qquad (i \neq j).
$$

Наконец, пользуясь наличием на главной диагонали всего полученного определителя $''\Box$ минус единицы, приводим его к виду:

$$
'''\Box = \left|\begin{array}{cccccc}
{}''_1\Box^1_{11} & 0\ldots0 & {}''_2\Box^1_{11} & 0\ldots0 & \ldots\ldots{}''_n\Box^1_{11} & 0\ldots0 \\
0 & -1\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & \ldots\ldots0 & 0\ldots0 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & 0\ldots-1 & 0 & 0\ldots0 & \ldots\ldots0 & 0\ldots0 \\
{}''_1\Box^2_{11} & 0\ldots0 & {}''_2\Box^2_{11} & 0\ldots0 & \ldots\ldots{}''_n\Box^2_{11} & 0\ldots0 \\
0 & 0\ldots0 & 0 & -1\ldots0 & \ldots\ldots0 & 0\ldots0 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots-1 & \ldots\ldots0 & 0\ldots0 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
{}''_1\Box^n_{11} & 0\ldots0 & {}''_2\Box^n_{11} & 0\ldots0 & \ldots\ldots{}''_n\Box^n_{11} & 0\ldots0 \\
0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & \ldots\ldots0 & -1\ldots0 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & \ldots\ldots0 & 0\ldots-1
\end{array}\right| =
$$

$$
= \frac{(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - n}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\sum\limits_{k=1}^{p_j}\xi_{M^j_k})}
\left|\begin{array}{cccc}
1+\sum\limits_{k=1}^{p_1}\frac{m^1_{1k}}{m_1}\xi_{M^1_k} & \sum\limits_{k=1}^{p_1}\frac{m^1_{2k}}{m_2}\xi_{M^1_k} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p_1}\frac{m^1_{nk}}{m_n}\xi_{M^1_k} \\
\sum\limits_{k=1}^{p_2}\frac{m^2_{1k}}{m_1}\xi_{M^2_k} & 1+\sum\limits_{k=1}^{p_2}\frac{m^2_{2k}}{m_2}\xi_{M^2_k} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{p_2}\frac{m^2_{nk}}{m_n}\xi_{M^2_k} \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
\sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{m^n_{1k}}{m_1}\xi_{M^n_k} & \sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{m^n_{2k}}{m_2}\xi_{M^n_k} & \cdots & 1+\sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{m^n_{nk}}{m_n}\xi_{M^n_k}
\end{array}\right|.
$$

С учетом формулы (7), получаем окончательно вид якобиана:

$$
\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right| = \frac{\det(\delta^i_j + \sum\limits_{k=1}^{p_i}\frac{m^i_{jk}}{m_j}\xi_{M^i_k})}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\sum\limits_{k=1}^{p_j}\xi_{M^j_k})^{p_j - \frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_i} m^i_{jk}+1}}. \tag{8}
$$

Займемся теперь подынтегральным выражением:

$$
y^{\mu}\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{p_i}(x_{M^i_k})^{u_{M^i_k}-1} = \prod_{j=1}^{n}\tau_j^{-\frac{\mu_j}{m_j}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{p_i}(\xi_{M^i_k}\prod_{s=1}^{n}\tau_s^{\frac{m^i_{sk}}{m_s}-\delta^i_s})^{u_{M^i_k}-1} =
$$

$$
= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{p_i}(\xi_{M^i_k})^{u_{M^i_k}-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\tau_j^{\frac{\mu_j}{m_j}}}\prod_{t=1}^{n}\prod_{r=1}^{p_t}\prod_{s=1}^{n}(\tau_s^{\frac{m^t_{sr}}{m_s}-\delta^t_s})^{u_{M^t_r}-1} =
$$

$$
= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{p_i}(\xi_{M^i_k})^{u_{M^i_k}-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\tau_j^{\frac{\mu_j}{m_j}}}\cdot(\tau_1^{\frac{m^1_{11}}{m_1}-1}..\tau_n^{\frac{m^1_{n1}}{m_n}})^{u_{M^1_1}-1}\ldots(\tau_1^{\frac{m^1_{1p_1}}{m_1}-1}..\tau_n^{\frac{m^1_{np_1}}{m_n}})^{u_{M^1_{p_1}}-1}\ldots.\times
$$

$$
\ldots\times\left(\tau_1^{\frac{m_{11}^n}{m_1}}\ldots\tau_n^{\frac{m_{n1}^n}{m_n}-1}\right)^{u_{M_1^n}-1}\ldots\left(\tau_1^{\frac{m_{1p_n}^n}{m_1}}\ldots\tau_n^{\frac{m_{np_n}^n}{m_n}-1}\right)^{u_{M_{p_n}^n}-1}=
$$

$$
=\frac{\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{p_i}(\xi_{M_k^i})^{u_{M_k^i}-1}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sum_{k=1}^{p_j}\xi_{M_k^j})^{\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_j}m_{js}^t u_{M_s^t})+\frac{1}{m_j}(\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_j}m_{js}^t)+\sum_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}-p_j}}\,. \tag{9}
$$

С учетом формулы (8) и (9) получаем, что после замены переменных (6) преобразование Меллина выглядит так:

$$
M[y^\mu](u)=\int\limits_{R_+^{|p|}}\frac{\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{p_i}(\xi_{M_k^i})^{u_{M_k^i}-1}\det(\delta_j^i+\sum_{k=1}^{p_i}\frac{m_{jk}^i}{m_j}\xi_{M_k^i})}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sum_{k=1}^{p_j}\xi_{M_k^j})^{\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i}m_{js}^i u_{M_s^i})+\sum_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}+1}}\,d\xi\,, \tag{10}
$$

где $(|p|=p_1+\ldots+p_n,\quad i,j=1,\ldots,n)$.

Пусть E — единичная, A — произвольная $n\times n$-матрицы. Хорошо известна формула линейной алгебры $\det(E+A)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{inv}_k A$ — сумма всех инвариантов, то есть

$$
det(\delta_j^i+A_j^i)=1+\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\begin{vmatrix}A_{i_1}^{i_1}&\ldots&A_{i_q}^{i_1}\\ \ldots&\ddots&\ldots\\ A_{i_1}^{i_q}&\ldots&A_{i_q}^{i_q}\end{vmatrix}.
$$

В числителе формулы (10) $A_{i_r}^{i_l}=\sum_{k=1}^{p_{i_l}}\frac{m_{i_rk}^{i_l}}{m_{i_r}}\xi_{M_k^{i_l}},(l,r=1,...,q)$, тогда, воспользовавшись свойством полилинейности, получаем:

$$
\begin{vmatrix}A_{i_1}^{i_1}&\ldots&A_{i_q}^{i_1}\\ \ldots&\ddots&\ldots\\ A_{i_1}^{i_q}&\ldots&A_{i_q}^{i_q}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{k=1}^{p_{i_1}}\frac{m_{i_1k}^{i_1}}{m_{i_1}}\xi_{M_k^{i_1}}&\ldots&\sum_{k=1}^{p_{i_1}}\frac{m_{i_qk}^{i_1}}{m_{i_q}}\xi_{M_k^{i_1}}\\ \ldots&\ddots&\ldots\\ \sum_{k=1}^{p_{i_q}}\frac{m_{i_1k}^{i_q}}{m_{i_1}}\xi_{M_k^{i_q}}&\ldots&\sum_{k=1}^{p_{i_q}}\frac{m_{i_qk}^{i_q}}{m_{i_q}}\xi_{M_k^{i_q}}\end{vmatrix}=
$$

$$
=\frac{1}{m_{i_1}\ldots m_{i_q}}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix}m_{i_1j_1}^{i_1}&\ldots&m_{i_qj_1}^{i_1}\\ \ldots&\ddots&\ldots\\ m_{i_1j_q}^{i_q}&\ldots&m_{i_qj_q}^{i_q}\end{vmatrix}\xi_{M_{j_1}^{i_1}}\ldots\xi_{M_{j_q}^{i_q}}\,.
$$

Окончательно получаем:

$$
\det(\delta_j^i+\sum_{k=1}^{p_i}\frac{m_{jk}^i}{m_j}\xi_{M_k^i})=
$$

$$
=1+\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\frac{1}{m_{i_1}\ldots m_{i_q}}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix}m_{i_1j_1}^{i_1}&\ldots&m_{i_qj_1}^{i_1}\\ \ldots&\ddots&\ldots\\ m_{i_1j_q}^{i_q}&\ldots&m_{i_qj_q}^{i_q}\end{vmatrix}\xi_{M_{j_1}^{i_1}}\ldots\xi_{M_{j_q}^{i_q}}\,. \tag{11}
$$

Подставим выражение (11) в (10), выделим первое слагаемое, получим:

$$M[y^{\mu}](u)=\int\limits_{R_{+}^{|p|}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{p_i}(\xi_{M_k^i})^{u_{M_k^i}-1}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\sum\limits_{k=1}^{p_j}\xi_{M_k^j})^{\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^{i}u_{M_s^i})+\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}+1}}\,d\xi+$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\frac{1}{m_{i_1}\ldots m_{i_q}}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\ldots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix}m_{i_1j_1}^{i_1}&\ldots&m_{i_qj_1}^{i_1}\\ \ldots&\ddots&\ldots\\ m_{i_1j_q}^{i_q}&\ldots&m_{i_qj_q}^{i_q}\end{vmatrix}\times$$

$$\times\int\limits_{R_{+}^{|p|}}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{k=1}^{p_i}(\xi_{M_k^i})^{u_{M_k^i}-1}\xi_{M_{j_1}^{i_1}}\ldots\xi_{M_{j_q}^{i_q}}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\sum\limits_{k=1}^{p_j}\xi_{M_k^j})^{\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{js}^{i}u_{M_s^i})+\sum\limits_{s=1}^{p_j}u_{M_s^j}+1}}\,d\xi\,.$$

Полученные интегралы имеют вид, приведенный в справочнике [8, с. 594]:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\ldots\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x_1^{\nu_1-1}\ldots x_n^{\nu_n-1}}{(1+x_1+\ldots+x_n)^s}\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n=\frac{\Gamma(\nu_1)\ldots\Gamma(\nu_n)\Gamma(s-\nu_1-\ldots-\nu_n)}{\Gamma(s)},\tag{12}$$

где $s,\ \nu_k>0,\ \ k=1,\ldots,n.$

Применяя (12), получим

$$M[y^{\mu}](u)=\frac{\Gamma(u_{M_1^1})\ldots\Gamma(u_{M_{p_1}^1})\Gamma(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{1s}^{i}u_{M_s^i}+1)}{\Gamma(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{1s}^{i}u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_1}u_{M_s^1}+1)}\times\ldots$$

$$\ldots\times\frac{\Gamma(u_{M_1^n})\ldots\Gamma(u_{M_{p_n}^n})\Gamma(\frac{\mu_n}{m_n}-\frac{1}{m_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{ns}^{i}u_{M_s^i}+1)}{\Gamma(\frac{\mu_n}{m_n}-\frac{1}{m_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{ns}^{i}u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_n}u_{M_s^n}+1)}+$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\frac{1}{m_{i_1}\ldots m_{i_q}}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\ldots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix}m_{i_1j_1}^{i_1}&\ldots&m_{i_qj_1}^{i_1}\\ \ldots&\ddots&\ldots\\ m_{i_1j_q}^{i_q}&\ldots&m_{i_qj_q}^{i_q}\end{vmatrix}\times$$

$$\frac{\Gamma(u_{M_1^1})\ldots\Gamma(u_{M_{p_1}^1})\Gamma(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{1s}^{i}u_{M_s^i}+1)}{\Gamma(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{m_1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i}m_{1s}^{i}u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_1}u_{M_s^1}+1)}\times\ldots$$

$$\ldots \times \frac{\Gamma(u_{M_1^{i_1}})\ldots\Gamma(u_{M_{j_1}^{i_1}}+1)\ldots\Gamma(u_{M_{p_{i_1}}^{i_1}})\Gamma(\frac{\mu_{i_1}}{m_{i_1}}-\frac{1}{m_{i_1}}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{i_1 s}^i u_{M_s^i})}{\Gamma(\frac{\mu_{i_1}}{m_{i_1}}-\frac{1}{m_{i_1}}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{i_1 s}^i u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_{i_1}} u_{M_s^{i_1}}+1)} \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{\Gamma(u_{M_1^{i_q}})\ldots\Gamma(u_{M_{j_q}^{i_q}}+1)\ldots\Gamma(u_{M_{p_{i_q}}^{i_q}})\Gamma(\frac{\mu_{i_q}}{m_{i_q}}-\frac{1}{m_{i_q}}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{i_q s}^i u_{M_s^i})}{\Gamma(\frac{\mu_{i_q}}{m_{i_q}}-\frac{1}{m_{i_q}}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{i_q s}^i u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_{i_q}} u_{M_s^{i_q}}+1)} \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{\Gamma(u_{M_1^n})\ldots\Gamma(u_{M_{p_n}^n})\Gamma(\frac{\mu_n}{m_n}-\frac{1}{m_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{ns}^i u_{M_s^i}+1)}{\Gamma(\frac{\mu_n}{m_n}-\frac{1}{m_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{ns}^i u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_n} u_{M_s^n}+1)}.$$

Или

$$M[y^\mu](u) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(\prod\limits_{r=1}^{p_j}\Gamma(u_{M_r^j})\Gamma(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i}))}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{p_i} m_{ns}^i u_{M_s^i}+\sum\limits_{s=1}^{p_j} u_{M_s^j}+1)}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i}\right)+\right.$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\frac{1}{m_{i_1}\ldots m_{i_q}}\sum_{j_1=1}^{p_{i_1}}\cdots\sum_{j_q=1}^{p_{i_q}}\begin{vmatrix} m_{i_1 j_1}^{i_1} & \ldots & m_{i_q j_1}^{i_1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ m_{i_1 j_q}^{i_q} & \ldots & m_{i_q j_q}^{i_q}\end{vmatrix}\left(\left(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i} m_{1s}^i u_{M_s^i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\ldots u_{M_{j_1}^{i_1}}\ldots u_{M_{j_q}^{i_q}}\ldots\left(\frac{\mu_n}{m_n}-\frac{1}{m_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i} m_{ns}^i u_{M_s^i}\right)\right)\Bigg). \tag{13}$$

К полученному $M[y^\mu](u)$ применим обратное преобразование Меллина (4), где вектор γ выбирается из симплекса

$$\Big\{u \in C^{p_1+\ldots p_n} : \mathrm{Re}\, u_{M_s^i} > 0,$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{p_i} m_{js}^i u_{M_s^i}\right) > 0, \quad s=1,\ldots,p_j, \quad j=1,\ldots,n\Big\}.$$

Тогда для любого $\mu \in R_+^n$ функция $y^\mu(x)$ разлагается в ряд Тейлора гипергеометрического типа (5).

Теорема доказана.

Исследования вопросов выделения однозначных ветвей решений, сходимости несобственных интегралов (3) и (4), описания областей сходимости рядов (5), развивающих идеи работы А.Ю. Семушевой и А.К. Циха, впереди; кроме того, ограничения теоремы 1 сужают класс систем уравнений до ***нормальных систем меллиновского типа*** (2), поэтому рассматриваем результат теоремы 1 лишь как подсказывающий вид решения для общих систем с буквенными коэффициентами в классе формальных степенных рядов.

Тогда то, что ряды (5) дают решения системы (2) без ограничений на степени ($m_i > m^i_{jk}$) и на сходимости интегралов (3),(4), необходимо проверять непосредственной подстановкой (5) в (2).

Теорема 2. *Формальные степенные ряды (5) дают решения системы (2).*

Доказательство.

Рассмотрим следующие значения вектора μ: $(\mu_1, \dots, \mu_n) = (0, \dots, m_i, 0, \dots, 0)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) = (m^i_{11}, \dots, m^i_{n1},), \dots, (\mu_1, \dots, \mu_n) = (m^i_{1p_i}, \dots, m^i_{np_i},)$, $\quad (i = 1, \dots, n)$.

Обозначим $N^\lambda_s = \sum\limits_{je=1}^{p_\lambda} m^\lambda_{sj} k^\lambda_j$, тогда из формулы (5) получаем:

$$y_i^{m_i} = \sum_{\substack{k_1^1 \geqslant 0, \dots, k_{p_1}^1 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ k_1^n \geqslant 0, \dots, k_{p_n}^n \geqslant 0}} \frac{(-1)^{k_1^1 + \dots + k_{p_1}^1 + \dots + k_1^i + \dots + k_{p_i}^i + \dots + k_1^n + \dots + k_{p_n}^n}}{k_1^1! \dots k_{p_1}^1! \dots k_1^i! \dots k_{p_i}^i! \dots k_1^n! \dots k_{p_n}^n!} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{1}{m_1} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda) \dots \Gamma(\frac{1}{m_i} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_i^\lambda) \dots \Gamma(\frac{1}{m_n} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda) \cdot (\frac{1}{m_i} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_i^\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{m_1} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda - \sum\limits_{r=1}^{p_1} k_r^1 + 1) \dots \Gamma(\frac{1}{m_i} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_i^\lambda - \sum\limits_{r=1}^{p_i} k_r^i + 2) \dots \Gamma(\frac{1}{m_n} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda - \sum\limits_{r=1}^{p_n} k_r^n + 1)} \times$$

$$\times ((\frac{1}{m_1} \sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda) \dots [i] \dots (\frac{1}{m_n} \sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda) + \sum_{q=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant n \\ (i_1 \neq i, \dots, i_q \neq i)}} \frac{(-1)^q}{m_{i_1} \dots m_{i_q}} \begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \dots & N_{i_q}^{i_1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ N_{i_1}^{i_q} & \dots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix} \times$$

$$\times (\frac{1}{m_1} \sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda) \dots [i, i_1, \dots, i_q] \dots (\frac{1}{m_n} \sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda)) \cdot x_{M_1^1}^{k_1^1} \dots x_{M_{p_1}^1}^{k_{p_1}^1} \dots x_{M_1^i}^{k_1^i} \dots x_{M_{p_i}^i}^{k_{p_i}^i} \dots x_{M_1^n}^{k_1^n} \dots x_{M_{p_n}^n}^{k_{p_n}^n}.$$

$$x_{M_1^i} y^{M_1^i} = \sum_{\substack{k_1^1 \geqslant 0, \dots, k_{p_1}^1 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ k_1^n \geqslant 0, \dots, k_{p_n}^n \geqslant 0}} \frac{(-1)^{k_1^1 + \dots + k_{p_1}^1 + \dots + k_1^i + \dots + k_{p_i}^i + \dots + k_1^n + \dots + k_{p_n}^n}}{k_1^1! \dots k_{p_1}^1! \dots k_1^i! \dots k_{p_i}^i! \dots k_1^n! \dots k_{p_n}^n!} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{1}{m_1} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda) \dots \Gamma(\frac{1}{m_i} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_i^\lambda) \dots \Gamma(\frac{1}{m_n} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda) \cdot k_1^i}{\Gamma(\frac{1}{m_1} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda - \sum\limits_{r=1}^{p_1} k_r^1 + 1) \dots \Gamma(\frac{1}{m_i} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_i^\lambda - \sum\limits_{r=1}^{p_i} k_r^i + 2) \dots \Gamma(\frac{1}{m_n} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda - \sum\limits_{r=1}^{p_n} k_r^n + 1)} \times$$

$$\times(\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i=i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\frac{(-1)^q}{m_i m_{i_2}\ldots m_{i_q}}\begin{vmatrix} m^i_{i1} & m^i_{i_2 1} & \ldots & m^i_{i_q 1}\\ N^{i_2}_i & N^{i_2}_{i_2} & \ldots & N^{i_2}_{i_q}\\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots\\ N^{i_q}_i & N^{i_q}_{i_2} & \ldots & N^{i_q}_{i_q}\end{vmatrix}\times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_1)\ldots[i=i_1.i_2\ldots,i_q]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_n)+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q=i\leqslant n}\frac{(-1)^q}{m_{i_1}\ldots m_{i_{q-1}}m_i}\begin{vmatrix} N^{i_1}_{i_1} & \ldots & N^{i_1}_{i_{q-1}} & N^{i_1}_i\\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ N^{i_{q-1}}_{i_1} & \ldots & N^{i_{q-1}}_{i_{q-1}} & N^{i_{q-1}}_i\\ m^i_{i_1 1} & \ldots & m^i_{i_{q-1}1} & m^i_{i1}\end{vmatrix}\times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_1)\ldots[i_1,\ldots,i_{q-1}.i_q=i]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_n))\times$$

$$\times x^{k^1_1}_{M^1_1}\ldots x^{k^1_{p_1}}_{M^1_{p_1}}\ldots x^{k^i_1}_{M^i_1}\ldots x^{k^i_{p_i}}_{M^i_{p_i}}\ldots x^{k^n_1}_{M^n_1}\ldots x^{k^n_{pn}}_{M^n_{pn}}.$$

$$x_{M^i_{p_i}}y^{M^i_{p_i}}=\sum_{\substack{k^1_1\geqslant0,\ldots,k^1_{p_1}\geqslant0,\\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots,\\ k^n_1\geqslant0,\ldots,k^n_{pn}\geqslant0}}\frac{(-1)^{k^1_1+\ldots+k^1_{p_1}+\ldots+k^i_1+\ldots+k^i_{p_i}+\ldots+k^n_1+\ldots+k^n_{pn}}}{k^1_1!\ldots k^1_{p_1}!\ldots k^i_1!\ldots k^i_{p_i}!\ldots k^n_1!\ldots k^n_{pn}!}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_1)\ldots\Gamma(\frac{1}{m_i}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_i)\ldots\Gamma(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_n)\cdot k^i_{p_i}}{\Gamma(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_1-\sum_{r=1}^{p_1}k^1_r+1)\ldots\Gamma(\frac{1}{m_i}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_i-\sum_{r=1}^{p_i}k^i_r+2)\ldots\Gamma(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_n-\sum_{r=1}^{p_n}k^n_r+1)}\times$$

$$\times(\sum_{q=1}^{n}\sum_{1\leqslant i=i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\frac{(-1)^q}{m_i m_{i_2}\ldots m_{i_q}}\begin{vmatrix} m^i_{ip_i} & m^i_{i_2 p_i} & \ldots & m^i_{i_q p_i}\\ N^{i_2}_i & N^{i_2}_{i_2} & \ldots & N^{i_2}_{i_q}\\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots\\ N^{i_q}_i & N^{i_q}_{i_2} & \ldots & N^{i_q}_{i_q}\end{vmatrix}\times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_1)\ldots[i=i_1,i_2\ldots,i_q]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n}N^{\lambda}_n)+\ldots$$

$$\ldots + \sum_{q=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1< \ \ <i_q=i\leqslant n} \frac{(-1)^q}{m_{i_1}\ldots m_{i_{q-1}} m_i} \begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_1} & N_i^{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ N_{i_1}^{i_{q-1}} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_{q-1}} & N_i^{i_{q-1}} \\ m_{i_1 p_i}^i & \ldots & m_{i_{q-1} p_i}^i & m_{i p_i}^i \end{vmatrix} \times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda)\ldots[i_1,\ldots,i_{q-1},i_q=i]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda)) \times$$

$$\times x_{M_1^1}^{k_1^1}\ldots x_{M_{p_1}^1}^{k_{p_1}^1}\ldots x_{M_1^i}^{k_1^i}\ldots x_{M_{p_i}^i}^{k_{p_i}^i}\ldots x_{M_1^n}^{k_1^n}\ldots x_{M_{p_n}^n}^{k_{p_n}^n}.$$

Формула представляет моном y^μ для произвольного y^μ, поэтому подстановка в уравнения системы (2) сводится к конкретному выбору μ и повышению на единицу степени x_{M^i} в мономе x_M^k.

Сложим полученные выражения $y_i^{m_i} + x_{M_1^i} y^{M_1^i} + \ldots + x_{M_{p_i}^i} y^{M_{p_i}^i}$, сгруппируем и воспользуемся тождеством Бине-Коши, хорошо известным в линейной алгебре:

$$(\sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda)\ldots(\sum_{\lambda=1}^{n} N_i^\lambda)\ldots(\sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda)+$$

$$+\sum_{q=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1< \ \ <i_q\leqslant n} (-1)^q \begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & N_{i_2}^{i_1} & \ldots & N_{i_q}^{i_1} \\ N_{i_1}^{i_2} & N_{i_2}^{i_2} & \ldots & N_{i_q}^{i_2} \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots \\ N_{i_1}^{i_q} & N_{i_2}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix} (\sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda)\ldots[i_1,\ldots,i_q]\ldots(\sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda) \equiv 0$$

(здесь и всюду в этой статье квадратные скобки вида $[i_1,\ldots,i_q]$ означают пропуск соответствующих множителей или слагаемых). Приводим только выражение в скобках:

$$(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda)\ldots(\frac{1}{m_i}\sum_{\lambda=1}^{n} N_i^\lambda)\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda)+\sum_{q=1}^{n}(-1)^q B_q,$$

где

$$B_q = \sum_{\substack{1\leqslant i_1< \ \ <i_q\leqslant n \\ (i_1\neq i, \ \ ,i_q\neq i)}} \frac{1}{m_{i_1}\ldots m_{i_q}} \begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_q}^{i_1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ N_{i_1}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix} (\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda)\ldots[i_1,\ldots,i_q]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda)+$$

$$+\sum_{1\leqslant i=i_1< \ \ <i_q\leqslant n} \frac{k_1^i}{m_i m_{i_2}\ldots m_{i_q}} \begin{vmatrix} m_{i1}^i & m_{i_2 1}^i & \ldots & m_{i_q 1}^i \\ N_i^{i_2} & N_{i_2}^{i_2} & \ldots & N_{i_q}^{i_2} \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots \\ N_i^{i_q} & N_{i_2}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix} (\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n} N_1^\lambda)\ldots[i_2\ldots,i_q]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n} N_n^\lambda)+$$

$$\ldots + \sum_{1\leqslant i_1< \ <i_q=i\leqslant n} \frac{k_1^i}{m_{i_1}\ldots m_{i_{q-1}}m_i} \begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_1} & N_i^{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ N_{i_1}^{i_{q-1}} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_{q-1}} & N_i^{i_{q-1}} \\ m_{i_1 1}^i & \ldots & m_{i_{q-1}1}^i & m_{i1}^i \end{vmatrix} \times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^n N_1^\lambda)\ldots[i_1,\ldots,i_{q-1}]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^n N_n^\lambda) + \ldots +$$

$$\sum_{1\leqslant i=i_1< \ ..<i_q\leqslant n} \frac{k_{p_i}^i}{m_i m_{i_2}\ldots m_{i_q}} \begin{vmatrix} m_{ip_i}^i & m_{i_2p_i}^i & \ldots & m_{i_qp_i}^i \\ N_i^{i_2} & N_{i_2}^{i_2} & \ldots & N_{i_q}^{i_2} \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots \\ N_i^{i_q} & N_{i_2}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix} \times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^n N_1^\lambda)\ldots[i_2\ldots,i_q]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^n N_n^\lambda) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{1\leqslant i_1< \ .<i_q=i\leqslant n} \frac{k_{p_i}^i}{m_{i_1}\ldots m_{i_{q-1}}m_i} \begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_1} & N_i^{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ N_{i_1}^{i_{q-1}} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_{q-1}} & N_i^{i_{q-1}} \\ m_{i_1p_i}^i & \ldots & m_{i_{q-1}p_i}^i & m_{ip_i}^i \end{vmatrix} \times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^n N_1^\lambda)\ldots[i_1,\ldots.i_{q-1}]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^n N_n^\lambda)) =$$

$$= \frac{1}{m_{i_1}\ldots m_{i_q}}(\sum_{\substack{1\leqslant i_1< \ <i_q\leqslant n \\ (i_1\neq i,. \ ,i_q\neq i)}} \begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_q}^{i_1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ N_{i_1}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix} (\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^n N_1^\lambda)\ldots[i_1,\ldots,i_q]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^n N_n^\lambda) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i=i_1< \ <i_q\leqslant n}(\begin{vmatrix} m_{i1}^i k_1^i & m_{i_21}^i k_1^i & \ldots & m_{i_q1}^i k_1^i \\ N_i^{i_2} & N_{i_2}^{i_2} & \ldots & N_{i_q}^{i_2} \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots \\ N_i^{i_q} & N_{i_2}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} m_{ip_i}^i k_{p_i}^i & m_{i_2p_i}^i k_{p_i}^i & \ldots & m_{i_qp_i}^i k_{p_i}^i \\ N_i^{i_2} & N_{i_2}^{i_2} & \ldots & N_{i_q}^{i_2} \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots \\ N_i^{i_q} & N_{i_2}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q} \end{vmatrix}) \times$$

$$\times(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^n N_1^\lambda)\ldots[i_1=i,i_2\ldots,i_q]\ldots(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^n N_n^\lambda) + \ldots$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q=i\leqslant n}\left(\begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_1} & N_{i}^{i_1}\\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ N_{i_1}^{i_{q-1}} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_{q-1}} & N_{i}^{i_{q-1}}\\ m_{ik}^{i}{}_{1} & \ldots & m_{i_{q-1}1}^{i}k_1^i & m_{i1}^{i}k_1^i\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_1} & N_{i}^{i_1}\\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ N_{i_1}^{i_{q-1}} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_{q-1}} & N_{i}^{i_{q-1}}\\ m_{i_1p_i}^{i}k_{p_i}^i & \ldots & m_{i_{q-1}p_i}^{i}k_{p_i}^i & m_{ip_i}^{i}k_{p_i}^i\end{vmatrix}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{m_1}\sum_{\lambda=1}^{n}N_1^{\lambda}\right)\ldots[i_1,\ldots,i_{q-1},i_q=i]\ldots\left(\frac{1}{m_n}\sum_{\lambda=1}^{n}N_n^{\lambda}\right))=$$

$$=\frac{1}{m_1\ldots m_i\ldots m_n}\Big(\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant n\\(i_1\neq i,\ldots,i_q\neq i)}}\begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_q}^{i_1}\\ \ldots & \ddots & \ldots\\ N_{i_1}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q}\end{vmatrix}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_1^{\lambda}\right)\ldots[i_1,\ldots,i_q]\ldots\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_n^{\lambda}\right)+$$

$$+\sum_{1\leqslant i=i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\begin{vmatrix} N_i^{i} & N_{i_2}^{i} & \ldots & N_{i_q}^{i}\\ N_i^{i_2} & N_{i_2}^{i_2} & \ldots & N_{i_q}^{i_2}\\ \ldots & \ddots & \ddots & \ldots\\ N_i^{i_q} & N_{i_2}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q}\end{vmatrix}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_1^{\lambda}\right)\ldots[i_1=i,i_2\ldots,i_q]\ldots\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_n^{\lambda}\right)+\ldots$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q=i\leqslant n}\begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_1} & N_{i}^{i_1}\\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ N_{i_1}^{i_{q-1}} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i_{q-1}} & N_{i}^{i_{q-1}}\\ N_{i_1}^{i} & \ldots & N_{i_{q-1}}^{i} & N_{i}^{i}\end{vmatrix}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_1^{\lambda}\right)\ldots[i_1,\ldots,i_{q-1},i_q=i]\ldots\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_n^{\lambda}\right))=$$

$$=\frac{1}{m_1\ldots m_i\ldots m_n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_q\leqslant n}\begin{vmatrix} N_{i_1}^{i_1} & \ldots & N_{i_q}^{i_1}\\ \ldots & \ddots & \ldots\\ N_{i_1}^{i_q} & \ldots & N_{i_q}^{i_q}\end{vmatrix}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_1^{\lambda}\right)\ldots[i_1,\ldots,i_q]\ldots\left(\sum_{\lambda=1}^{n}N_n^{\lambda}\right)$$

Остались еще суммы с формированием следующих массивов индексов:

$$\sum_{s=1}^{p_i}\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_s\leqslant p_i}\sum_{\substack{k_{j_1}^i=0,\ldots,k_{j_s}^i=0,k_1^i\geqslant 1,\ldots,k_{p_i}^i\geqslant 1\\ k_1^1\geqslant 0,\ldots,k_{p_1}^1\geqslant 0,\ldots,k_1^n\geqslant 0,\ldots,k_{p_n}^n\geqslant 0}}$$

Схема остается той же с отсутствием множителей $k_{j_1}^i!,\ldots,k_{j_s}^i!$ среди факториалов, слагаемых $k_{j_1}^i+\ldots+k_{j_s}^i$ в показателе степени (-1), мономов $x_{M_{j_1}^i}^{k_{j_1}^i}\ldots x_{M_{j_s}^i}^{k_{j_s}^i}$ в переменных и заменой $N_r^i=\sum_{\lambda=1}^{p_i}m_{r\lambda}^ik_\lambda^i$ $(r=1,\ldots,n)$ на $N_{r[j_1,\ldots,j_s]}^i$, в которых нет слагаемых $m_{rj_1}^ik_{j_1}^i+\ldots+m_{rj_s}^ik_{j_s}^i$. Самое первое слагаемое при $k_1^1=\ldots=k_{p_1}^1=k_1^i=\ldots=k_{p_i}^i=\ldots=k_1^n=\ldots=k_{p_n}^n=0$ равно 1.

Теорема 2 доказана.

При $n = 1$ и в случае нижнетреугольной системы получаются формулы Г.Меллина и И.А.Антиповой.

Автор выражает благодарность А.К.Циху за постановку задачи и внимание к работе, А.М.Кытманову и В.М.Трутневу — за предложение искать решение в классе формальных степенных рядов и непосредственной подстановки решения в исходную систему для проверки и доказательства и В.П.Кривоколеско — за набор текста и формул.

Список литературы

[1] MELLIN H.J. *Resolution de l'equation algebrique general a l'aide de la fonction*/ H.J.Mellin //S.C.R. Acad. Sci. 1921. - V.172. - P.658-661.

[2] ЖДАНОВ О.Н. *Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов*/ О.Н.Жданов, А.К.Цих // Сиб.матем. журн. 1988. - Т.39. - №2. - С.282-298.

[3] HORN J. *Über hypergeometrishe Funktionen zweier Veranderlichen*/ J.Horn // Math. Ann. - 1940. - V. 117. - P. 384-414.

[4] STURMFELS B. *Solving algebraic equation in terms of A-hypergeometric series*/ B.Sturmfels // Discrete Math. 2000. - V. 210. - №1-3. P. 171-181.

[5] СЕМУШЕВА А.Ю. *Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений*/ А.Ю.Семушева, А.К.Цих // Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. научн. тр. - Красноярск: КрасГУ, 2000. - С. 31-35.

[6] АНТИПОВА И.А. *Преобразования Меллина для суперпозиции общих алгебраических функций*/ И.А.Антипова // Труды международной конференции "Математические модели и методы их исследования". Т.1. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2001. - С. 31-35.

[7] TSIKH A.K. *Multimensional residues and their applications*/ A.K.Tsikh. - Amer. Math. Soc. - Providence. - 1992.

[8] ПРУДНИКОВ А.П. *Интегралы и ряды*/ А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.А.Маричев. - М.: Наука, 1981.