УДК 517.55

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ[1]

Д.Е. Лейнартас*

Аннотация

В работе доказан один простой признак устойчивости двумерных цифровых рекурсивных фильтров. Рассматриваются рациональные функции двух переменных, голоморфные в замкнутом единичном бикруге, который пересекается с гиперповерхностью полюсов функции в конечном числе точек, причем с порядком равным двум. Для таких функций дан критерий абсолютной сходимости их ряда Тейлора.

В теории обработки сигналов передаточная функция является рациональной функцией $F(z_1, \ldots, z_n)$, определяющей фильтр следующим образом [1, гл. 4] или [3, с. 197]: входной сигнал, представляющий собой кратную последовательность $x = x(k_1, \ldots, k_n)$, преобразуется в выходной сигнал $y = y(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в соответствии с равенством $Y = F \cdot X$, где X и Y — производящие функции последовательностей $x(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $y(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, а $F \cdot X$ — произведение степенных рядов. Фильтр называется *устойчивым*, если он всякую ограниченную последовательность преобразует в ограниченную же последовательность. Известно, что фильтр устойчив тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0} |a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \tag{1}$$

из модулей коэффициентов Тейлора $a(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ передаточной функции $F(z_1, \ldots, z_n)$.

В двумерном случае ($n = 2$) вопрос об абсолютной сходимости ряда Тейлора рациональной функции (передаточной функции фильтра) в замкнутом единичном поликруге исследован А.К. Цихом [5], который доказал, что если передаточная функция удовлетворяет на замкнутом единичном бикруге условию Гельдера с показателем $1/2$, то фильтр устойчивый, причем любого показателя гельдеровости, меньшего $1/2$, недостаточно для устойчивости. Как отмечал сам автор статьи [5], этот результат имеет больше теоретический интерес, чем практический, ибо проверять свойство гельдеровости не так просто.

Цель настоящей работы — привести один простой признак устойчивости двумерного фильтра.

Рассмотрим рациональную функцию

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{2}$$

где P и Q — многочлены. Будем считать, что дробь P/Q несократима, а также что $Q(0) \neq 0$, поэтому F разлагается в ряд Тейлора в некоторой окрестности начала координат:

[1]Работа поддержана Красноярским краевым фондом науки, грант 10F032M

$$F(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} a(\alpha) z^{\alpha}. \tag{3}$$

Пусть $V = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : Q(z_1, \ldots, z_n) = 0\}$ — гиперповерхность полюсов рациональной функции (2). Заметим, что каждая точка $z \in \mathbb{C}^n$ определяет полидиск

$$D(z) = \{w \in \mathbb{C}^n : |w_j| \leq |z_j|, j = 1, \ldots, n\}$$

и его остов, т.е. тор

$$T(z) = \{w \in \mathbb{C}^n : |w_j| = |z_j|, j = 1, \ldots, n\}.$$

Следуя [6], введем такое

Определение 1. *Точка $z \in V$ называется минимальной, если*

$$V \cap D(z) \subset T(z).$$

Нам будет удобно ввести следующую терминологию.

Определение 2. *Минимальную точку $z \in V$ назовем изолированной, если она изолированная в множестве $V \cap D(z)$. В противном случае z назовем неизолированной.*

В кратном ряде (3) выделим одномерную подпоследовательность коэффициентов таким образом: фиксируем вектор $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ и рассмотрим последовательность $\{a(kp)\}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ область сходимости ряда (3). Очевидно, что все точки $z_0 \in V \cap \partial\mathcal{D}$, для которых

$$|z_0^p| = \sup_{z\in\mathcal{D}} |z^p|,$$

являются минимальными. Их мы назовем *ближайшими особыми точками* рациональной функции P/Q *для направления* p.

Замена переменных $z = z_0 t = (z_{01}t_1, \ldots, z_{0n}t_n)$ позволяет перевести минимальную для гиперповерхности $V = \{z : Q(z) = 0\}$ точку z_0 в минимальную точку $(1, \ldots, 1)$ для гиперповерхности $\{t : Q(z_0 t) = 0\}$. Таким образом, приходим к ситуации, когда рациональная функция P/Q голоморфна в единичном поликруге. Тем самым, асимптотические свойства коэффициентов Тейлора можно использовать в проблеме устойчивости многомерных цифровых фильтров.

Рассмотрим двумерный случай. Итак, пусть рациональная функция $P(z,w)/Q(z,w)$ голоморфна в бикруге $U^2 = \{|z| < 1, |w| < 1\}$, а кривая

$$V = \{(z,w) : Q(z,w) = 0\}$$

пересекает остов $T^2 = \{|z| = 1, |w| = 1\}$ в конечном числе точек a_j. Для каждой точки a_j существует направление $(p,q) \in \mathbb{R}^2_+$, для которого a_j — ближайшая особая точка (см. [5, Лемма 3.1]). Известно, что гипербола $z^p w^q = a_{j1}^p a_{j2}^q$ касается кривой V; порядок касания обозначим μ_j:

$$\mu_j = \operatorname{ord}_{a_j}(z^p w^q - a_{j1}^p a_{j2}^q)|_V.$$

Наряду с числовой характеристикой μ_j кривой V нам потребуется еще одна, определенная в [5], которая выражает порядок касания в a_j кривой V с тором T^2 (или порядок примыкания V к бикругу $\bar{U}^2$). Для ее определения мы можем считать (после замены $(z,w) \to (ze^{i\varphi_1}, we^{i\varphi_2})$), что $a_j = (1,1)$. Рассмотрим неявную функцию $u = \Phi(v)$, определяемую уравнением $Q(u, ue^{iv}) = 0$ со свойством $\Phi(1) = 1$ (т.е. росток кривой V в точке $(1,1)$, записанный в координатах $u = z$, $v = -\ln(w/z)$). Положим $\theta = \mathrm{Re} v$ и определим искомый порядок касания V с T^2 как

$$\delta_j = \mathrm{ord}_0(|\Phi(\theta)| - 1).$$

Теорема 1. *Если комплексная алгебраическая кривая $V = \{Q = 0\}$ пересекает замкнутый единичный бикруг $\bar{U}^2$ в конечном числе точек $a_j \in T^2$, причем с порядком $\delta_j = 2$, то для рациональной функции $F(z,w) = P(z,w)/Q(z,w)$ следующие условия эквивалентны:*

a) порядок нуля числителя P в каждой точке a_j не меньше трех

$$\mathrm{ord}_{a_j} P \geq 3;$$

b) ряд Тейлора с центром в нуле для F абсолютно сходится в $\bar{U}^2$;

c) функция F непрерывна в $\bar{U}^2$.

Замечание 1. *В [5] показано, что всегда $\delta_j \geq \mu_j \geq 2$, следовательно, в условиях Теоремы 1 имеем $\delta_j = \mu_j = 2$ для всех точек a_j. Именно благодаря этому условию свойства b) и c) эквивалентны. До публикации статьи [5] существовала гипотеза Ш.А. Даутова [2, 4] о том, что свойства b) и c) эквивалентны в общей ситуации. Однако в [5] было доказано, что, вообще говоря, из непрерывности F в $\bar{U}^2$ еще не следует абсолютная сходимость ряда Тейлора в $\bar{U}^2$. Таким образом, Теорема 1 выявляет рамки справедливости гипотезы Ш.А. Даутова, состоящие в равенствах $\delta_j = \mu_j = 2$ в точках касания a_j кривой V и тора T^2.*

Доказательство. $a) \Rightarrow b)$. Воспользуемся утверждением Предложения 2.1 статьи [5], которое гласит, что каждая точка a_j вносит свой аддитивный асимптотический вклад $a_j(k_1,k_2)$ в последовательность $a(k_1,k_2)$ коэффициентов Тейлора функции $F = P/Q$. При этом в условиях $\delta_j = \mu_j = 2$ имеет место оценка

$$|a_j(k_1,k_2)| \leq \begin{cases} \mathrm{const} \cdot (k_1+k_2)^{-\frac{\beta_j+1}{2}}, \text{ если } k_1 \geq (pk_2 - qk_1)^2, \\ \mathrm{const} \cdot \mathrm{e}^{-C(k_1+k_2)^{\chi}}, \text{ если } k_1 < |pk_2 - qk_1|^{2-\chi}, \end{cases}$$

где $\beta_j = \mathrm{ord}_{a_j} P$, χ — любое положительное число, $C > 0$ — некоторое фиксированное число, вектор (p,q) — направление, для которого a_j — ближайшая особая точка. Иными словами, вне параболы $k_1 = |pk_2 - qk_1|^2$ последовательность $a_j(k_1,k_2)$ экспоненциально убывает, а внутри — убывает степенным образом.

Заметим, что для области

$$D = \{k_1 > 1, k_2 > 1, k_1 > (pk_2 - qk_1)^2\}$$

при $\beta_j \geq 3$ имеем:

$$\iint\limits_D (k_1+k_2)^{-\frac{\beta_j+1}{2}}\, dk_1 dk_2 \leq \iint\limits_D \frac{dk_1 dk_2}{(k_1+k_2)^2}.$$

После замены переменных $k_1 = s_1, pk_2 - qk_1 = s_2$ последний интеграл мажорируется, с точностью до некоторого множителя, сходящимся интегралом

$$\int\limits_{s_1 > s_2^2} \frac{ds_1 ds_2}{s_1^2} = \int\limits_1^{\infty} \frac{ds_1}{s_1^2} \int\limits_1^{\sqrt{s_1}} ds_2 = \int\limits_1^{\infty} \frac{ds_1}{s_1^{3/2}}.$$

По интегральному признаку сравнения получаем, что ряд $\sum_{\mathbb{Z}_+^2} |a_j(k_1, k_2)|$ сходится, следовательно, и полный ряд $\sum_{\mathbb{Z}_+^2} |a(k_1, k_2)|$ сходится. Тем самым импликация $a) \Rightarrow b)$ доказана.

$b) \Rightarrow c)$. Эта импликация вытекает из теоремы Вейерштрасса о непрерывности суммы равномерно сходящегося степенного ряда и из признака Вейерштрасса о равномерной сходимости ряда, который мажорируется сходящимся числовым рядом.

$c) \Rightarrow a)$. Предположим, что хотя бы один из порядков $\mathrm{ord}_{a_j} P \leq 2$. Без ограничения общности можно считать, что $a_j = (1, 1)$. По определению числа δ имеем

$$|\Phi(\theta)| = 1 + d\theta^2 + o(\theta^2), \quad d \neq 0. \tag{$*$}$$

Более того, поскольку $|\Phi(\theta)| > 1$ при $\theta \neq 0$, необходимо $d > 0$.

Если $\Phi(\theta) = 1 + b_1\theta + b_2\theta^2 + o(\theta^2)$, $b_1 \neq 0$, то рассмотрим семейство функций

$$\varphi_c(\theta) = 1 + b_1\theta + (b_2 + c)\theta^2 + o(\theta^2), \quad c \in \mathbb{R},$$

для которого согласно $(*)$

$$|\varphi_c(\theta)| = 1 + (c + d)\theta^2 + o(\theta^2).$$

Таким образом, при $c < -d$ путь $\gamma_c = (\varphi_c(\theta), \varphi_c(\theta)e^{i\theta})$ лежит в бикруге U^2 и касается V с порядком 2 (у φ_c и Φ одинаковые линейные части $1 + b_1\theta$ и различные квадратичные части). Таким образом, $Q|_{\gamma_c}$ имеет порядок 2:

$$Q|_{\gamma_c} = k(c)\theta^2 + \cdots, \qquad \text{где } k(c) \neq \mathrm{const}.$$

И если бы $\mathrm{ord}_{(1,1)} P$ был меньше 3, то сужение $P|_{\gamma_c}$ имело бы вид $k_1\theta^l + o(\theta^l)$, $l \leq 2$, причем k_1 не зависит от c. Поэтому при $l \leq 2$ функция $F = P/Q$ неограниченная на пути $\gamma_c \in \bar{U}^2$, а при $l = 2$ пределы этой функции на γ_c различны при разных c. Противоречие с непрерывностью F.

Список литературы

[1] Даджион Д. *Цифровая обработка многомерных сигналов*/ Д.Даджион, О.Мерсеро. – М.: Мир, 1988.

[2] Даутов Ш.А. *Об абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора рациональных функций двух переменных. Устойчивость двумерных цифровых рекурсивных фильтров*/ Ш.А.Даутов // ДАН СССР – 1981.– Т. 257(6).– С. 1302-1305.

[3] Джури Э. *Инноры и устойчивость динамических систем* / Э.Джури. – М.: Наука, 1979.

[4] *Некоторые нерешенные вопросы многомерного комплексного анализа*// Ред. Е.М. Чирка. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1987.

[5] Цих А.К. *Условия абсолютной сходимости ряда их коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных*/ А.К.Цих // Матем. сб. – 1991. – Т. 182(11). – С. 1588-1612.

[6] Pemantle R. *Asymptotics of multivariate sequences, part I: smooth points of the singular variety*/ R.Pemantle, M.Wilson // J. Comb. Th. – 2003. (To Appear).