УДК 517.55

О ГОЛОМОРФНОЙ ФОРМУЛЕ ЛЕФШЕЦА В ОБЛАСТЯХ $\mathbb{C}^n$ [1]

А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец*

Классическая формула Лефшеца выражает число неподвижных точек непрерывного отображения $f\colon M \to M$ в терминах преобразования, индуцированного f на когомологиях M. В 1966 г. Атья и Ботт расширили эту формулу на эллиптические комплексы над компактным замкнутым многообразием. В частности, они получили голоморфную формулу Левшеца для компактных комплексных многообразий без границы. На компактных комплексных многообразиях с границей комплекс Дольбо не эллиптический и, следовательно, теория Атьи и Ботта не применима. Обходя трудности, связанные с граничным поведением когомологий Дольбо, Донелли и Фефферман (1986) получили формулу для числа неподвижных точек для бергмановой метрики. Цель статьи — дать голоморфную формулу Лефшеца в ограниченных областях пространства $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей.

Если M есть замкнутое многообразие и $f\colon M \to M$ — непрерывное отображение, то число Левшеца f определяется формулой

$$L(f) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr}(Hf)_i,$$

где $(Hf)_i$ обозначает индуцированный эндоморфизм в когомологиях с действительными коэффициентами $H^i(M,\mathbb{R})$ и tr — след. В 1926 г. Лефшец опубликовал свою знаменитую формулу неподвижных точек [11], выражающую эту глобальную характеристику f в случае, когда все фиксированные точки f изолированы, как сумму локальных индексов $\nu(p)$ фиксированных точек.

В статье [9] Атья и Ботт установили аналог формулы Лефшеца для геометрических эндоморфизмов эллиптических комплексов над гладкими компактными замкнутыми многообразиями M.

Бреннер и Шубин [3] доказали аналог формулы Лефшеца для эллиптических комплексов на компактных гладких многообразиях с границей M, в которых дифференциалы есть операторы из алгебры Буте де Монвиля.

В частном случае формулу Левшеца можно применить к комплексу Дольбо и получить *голоморфную формулу Левшеца.* В самом начале 80-х годов М.Шубин привлек внимание к теории неподвижных точек на компактных комплексных многообразиях с границей. Заметим, что результаты [3] не применимы к комплексу Дольбо на комплексных многообразиях с границей, поскольку этот комплекс не эллиптичен. Хотя когомологии комплекса Дольбо конечномерны в ненулевых размерностях для строго псевдовыпуклых многообразий, нулевые когомологии бесконечномерны. Это одна из трудностей при определении числа Левшеца на комплексных многообразиях

[1]Первый автор использовал поддержку гранта Минобразования РФ № Е 00-1.0-151, второй — поддержку РФФИ, грант № 02-01-00167

с границей. В 80-е годы данной проблемой интенсивно занимался А.Бреннер. Он также изучал теорию фиксированных точек для касательного комплекса Коши-Римана. Однако он не смог довести до конца эту деятельность [2].

Цель нашей статьи — доказать формулу Лефшеца для комплекса Дольбо в ограниченных строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей. Наш подход совершенно отличен от подхода статей [3] и [2]. Вместо него мы используем точные интегральные формулы для числа Лефшеца, предложенные в [12].

1. Вспомогательный комплекс Дольбо

Везде в дальнейшем будем считать, что $M = \overline{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}$ есть строго линейно выпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ с границей класса C^∞. Положим $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : \varrho(z) < 0\}$, где ϱ есть C^∞ вещественнозначная функция в $\mathbb{C}^n$, градиент ϱ не равен нулю на $\partial\mathcal{D}$. Строгая линейная выпуклость $\mathcal{D}$ означает, что $\langle \nabla_\zeta \varrho, z-\zeta \rangle \neq 0$ для всех $\zeta \in \partial\mathcal{D}$ и $z \in \overline{\mathcal{D}}$ с $z \neq \zeta$. Другими словами, комплексная касательная гиперплоскость к $\partial\mathcal{D}$ в каждой точке $\zeta \in \partial\mathcal{D}$ пересекается с замыканием дополнения к $\mathcal{D}$ только в точке $z = \zeta$.

Рассмотрим комплекс Дольбо

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^1(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^n(\overline{\mathcal{D}}) \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$ есть пространство всех дифференциальных форм бистепени $(0,q)$ с C^∞-коэффициентами на $\overline{\mathcal{D}}$. Хорошо известно, что когомологии $H^q(\mathcal{E}^\cdot(\overline{\mathcal{D}}))$ из (1) равны нулю для каждого $q > 0$ (см., например, [7, теорема 8.12]). Когомологии $H^q(\mathcal{E}^\cdot(\overline{\mathcal{D}}))$ для $q = 0$ являются бесконечномерными. Они совпадают с пространством $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ всех C^∞-функций на $\overline{\mathcal{D}}$, которые голоморфны во внутренности $\mathcal{D}$.

В дальнейшем нам понадобится также вспомогательный комплекс Дольбо.

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}) \xrightarrow{\imath} \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^1(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^n(\overline{\mathcal{D}}) \longrightarrow 0, \tag{2}$$

где $\imath$ есть оператор вложения. Когомологии (2) для каждого $q \geq 1$ равны соответствующим когомологиям комплекса (1). С другой стороны, когомологии (2) для $q = -1$ и $q = 0$ тривиальны. Следовательно, комплекс (2) является фредгольмовым (см., например, [10, §19.1] в отличие от комплекса (1)).

Рассмотрим голоморфное отображение $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, которое продолжается как C^∞-отображение на $\overline{\mathcal{D}}$. Если, в частности, f собственное, то оно автоматически продолжается как C^∞-отображение на $\overline{\mathcal{D}}$ (см. теорему 11 из [6, глава 2]). В дальнейшем предположим, что f имеет только изолированные фиксированные точки $f(z) = z$ на $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда число этих точек на $\overline{\mathcal{D}}$ конечно.

Отображение f индуцирует эндоморфизм $E = \{E_q\}$ комплекса (2), задаваемый $E_q = f_q^\sharp$, где

$$f_q^\sharp : \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}) \to \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$$

есть оператор прообраза на дифференциальных формах бистепени $(0,q)$ отображения f. Так как f голоморфно, то $f_0^\sharp$ сохраняет также пространства $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$. Обозначим $Hf^\sharp = \{(Hf^\sharp)_q\}$ соответствующий эндоморфизм когомологий (2).

Определение 1. *Числом Лефшеца вспомогательного комплекса (2) назовем*

$$L_{\mathrm{p}}(f^{\sharp}) = \sum_{q=-1}^{n} (-1)^q \operatorname{tr}(Hf^{\sharp})_q.$$

Здесь $\operatorname{tr}(Hf^{\sharp})_q$ есть след эндоморфизма $(Hf^{\sharp})_q$ на когомологиях (2) в q-м шаге, который корректно определен. Как и выше, $\operatorname{tr}(Hf^{\sharp})_q$ тривиален для $q = -1$ и $q = 0$. Следовательно, $L_{\mathrm{p}}(f^{\sharp})$ может быть назван *частным числом Лефшеца* эндоморфизма $f^{\sharp}$ комплекса (1). Однако нет канонического пути введения *полного числа Лефшеца* $L_{\mathrm{t}}(f^{\sharp})$ для эндоморфизма (1), поскольку когомологии $H^0(\mathcal{E}^{\cdot}(\overline{\mathcal{D}}))$ бесконечномерны. Поэтому след $(Hf^{\sharp})_0$ на $H^0(\mathcal{E}^{\cdot}(\overline{\mathcal{D}}))$ требует подходящей регуляризации. Цель статьи — определить полное число Лефшеца для эндоморфизма $f^{\sharp}$ комплекса Дольбо и вычислить его в терминах инфинитезимальных инвариантов фиксированных точек f.

2. Параметрикс комплекса Дольбо

Наши вычисления основаны на точном фундаментальном решении $\bar\partial$-задачи в строго линейно выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$ (см. теорему 8.9 в [7]). Это позволяет нам сконструировать точное фундаментальное решение вспомогательного комплекса (2).

Для описания этой конструкции положим

$$P(\zeta) = \nabla_{\zeta}\varrho = \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\zeta_1}, \dots, \frac{\partial\varrho}{\partial\zeta_n}\right)$$

и

$$\Phi(\zeta, z) = \langle P(\zeta), \zeta - z\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varrho}{\partial\zeta_j}(\zeta_j - z_j).$$

Функция $\Phi(\zeta, z)$ отлична от нуля для всех $\zeta \in \partial\mathcal{D}$ и $z \in \overline{\mathcal{D}}$ при $\zeta \neq z$, поскольку $\mathcal{D}$ является строго линейно выпуклой.

Для заданной гладкой функции $\eta = \eta(\zeta, z, \lambda)$ со значениями $\mathbb{C}^n$, где $(\zeta, z, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, определим форму Лере

$$\omega'(\eta) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \eta_j d\eta[j],$$

где $d\eta[j]$ есть внешнее произведение дифференциалов $d\eta_1, \dots, d\eta_n$, в котором дифференциал $d\eta_j$ пропущен. Положим также $d\eta = d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_n$. Тогда можно записать

$$\Big(\omega'(\eta)\Big) \wedge d\zeta \wedge dz = \Big(\sum_{q=0}^{n} \omega'_q(\eta)\Big) \wedge d\zeta \wedge dz, \tag{3}$$

где $\omega'_q(\eta)$ — дифференциальная форма степени $n - q - 1$ по $d\bar\zeta_1, \dots, d\bar\zeta_n$ и $d\lambda$ и степени q по $d\bar z_1, \dots, d\bar z_n$.

В соответствии с [7, §8] введем интегральные операторы

$$
\begin{aligned}
(T_q u)(z) &= (-1)^q \frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n} \int_{\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge \omega'_{q-1}\Big(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\Big) \wedge d\zeta,\\
(L_q u)(z) &= (-1)^q \frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n} \int_{\partial\mathcal{D}\times[0,1]} u(\zeta) \wedge \omega'_{q-1}\Big((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2} + \lambda\frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)}\Big) \wedge d\zeta
\end{aligned}
\tag{4}
$$

для $u \in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$, где

$$
\begin{aligned}
&(1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2} + \lambda\frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)} =\\
&= \Big((1-\lambda)\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2} + \lambda\frac{P_1(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)}, \dots, (1-\lambda)\frac{\bar\zeta_n-\bar z_n}{|\zeta-z|^2} + \lambda\frac{P_n(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)}\Big)
\end{aligned}
$$

для $0 \le \lambda \le 1$.

Операторы T_q и L_q, как известно, отображают $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}\cap U)$ в $\mathcal{E}^{q-1}(\overline{\mathcal{D}}\cap U)$. Обозначим

$$
\begin{array}{lll}
P_q = T_q + L_q, & \text{Если} & 1 \le q \le n,\\
P_q = 0, & \text{если} & q = 0 \text{ или } q = n+1.
\end{array}
\tag{5}
$$

Для произвольной дифференциальной формы $u \in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$ определим также интеграл Коши-Фантаппье:

$$
(F_q u)(z) = (-1)^q \int_{\partial\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge \omega'_q\Big(\frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)}\Big) \wedge d\zeta, \quad z \in \mathcal{D}. \tag{6}
$$

Эти операторы связаны друг с другом хорошо известной формулой Лере-Коппельмана.

Лемма 1. *Любая дифференциальная форма $u \in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$, $q \ge 0$, может быть представлена в $\mathcal{D}$ в виде*

$$
u = F_q u + P_{q+1}(\bar\partial u) + \bar\partial(P_q u). \tag{7}
$$

Интеграл $F_q u$ в действительности исчезает для $q > 0$, так как вектор-функция $\dfrac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)}$ голоморфна по z.

Так как ядро F_0 голоморфно по внешнему переменному z, то оператор F_0 отображает $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$.

Лемма 2. *Определенные выше операторы P_q и F_0 удовлетворяют соотношениям*

$$
\begin{array}{rcllll}
F_0 \imath u &=& u - S_{-1}u & \text{для всех} & u \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}), & q = -1;\\
P_1\bar\partial u + \imath F_0 u &=& u - S_0 u & \text{для всех} & u \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}), & q = 0;\\
P_{q+1}\bar\partial u + \bar\partial P_q u &=& u - S_q u & \text{для всех} & u \in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}), & q > 0,
\end{array}
\tag{8}
$$

где $S_{-1} = 0$.

Доказательство. Так как $P_0 = 0$, то все равенства (8) следуют из леммы 1 с $S_q = 0$ для всех q.

□

3. Число Лефшеца

Заметим, что все операторы S_q в (8) являются сглаживающими, т.е. они отображают $(\mathcal{E}^{n-q}(\overline{\mathcal{D}}))'$ в $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$.

Лемма 3. *Композиция* $f^\sharp \circ S$ *есть эндоморфизм вспомогательного комплекса Дольбо, и*

$$L_{\mathrm{P}}(f^\sharp) = L_{\mathrm{P}}(f^\sharp \circ S).$$

Доказательство. Применяя эндоморфизм $f^\sharp$ к обеим сторонам равенств (8), получим

$$\begin{aligned} (f^\sharp_{-1} \circ F_0)\imath &= f^\sharp_{-1} - f^\sharp_{-1} \circ S_{-1}, \\ (f^\sharp_0 \circ P_1)\bar\partial + \imath(f^\sharp_{-1} \circ F_0) &= f^\sharp_0 - f^\sharp_0 \circ S_0, \\ (f^\sharp_q \circ P_{q+1})\bar\partial + \bar\partial(f^\sharp_{q-1} P_q) &= f^\sharp_q - f^\sharp_q \circ S_q \end{aligned}$$

для всех $q > 0$. Так как $f^\sharp_{-1} \circ F_0$ отображает $\mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ и $f^\sharp_{q-1} \circ P_q$ отображает $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{E}^{q-1}(\overline{\mathcal{D}})$ для $q > 0$, то $f^\sharp$ и $f^\sharp \circ S$ являются гомотопными эндоморфизмами вспомогательного комплекса Дольбо. Следовательно, они индуцируют те же самые эндоморфизмы когомологий (2), т.е. $Hf^\sharp = H(f^\sharp \circ S)$, и лемма доказана.

□

Заметим, что $f^\sharp \circ S$ есть сглаживающий эндоморфизм вспомогательного комплекса Дольбо (2).

Лемма 4. *Если* $E = \{E_q\}_{q=-1}^n$ *есть сглаживающий эндоморфизм комплекса (2), тогда*

$$L_{\mathrm{P}}(E) = \sum_{q=-1}^{n} (-1)^q \operatorname{tr} E_q. \tag{9}$$

Доказательство. Доказательство этой леммы повторяет дословно доказательство лемм 4.2, 4.3 и следствия из статьи [4].

□

4. Интегральная формула для числа Лефшеца

Обозначим $K_{T_q}(\zeta, z)$ и $K_{L_q}(\zeta, z)$ ядра операторов T_q и L_q, соответственно. Вне диагонали $\mathcal{D}$ и $\partial\mathcal{D}$ все эти дифференциальные формы имеют бистепени $(n, n-q)$ по ζ и $(0, q)$ по z, $(n, n-q-1)$ по ζ и $(0, q)$ по z, соответственно.

Пусть Δ обозначает диагональное отображение $\overline{\mathcal{D}} \to \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$. Тогда операция $\operatorname{tr} \Delta^*$ есть обычное ограничение $2n$-формы с $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$ на $2n$-форму на $\overline{\mathcal{D}}$, т.е. $\operatorname{tr} \Delta^* = \Delta^\sharp$ с tr, являющимся следом на слоях.

Рассмотрим следующую дифференциальную форму бистепени $(n, n-1)$, определенную вне множества $\operatorname{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})$ в $\overline{\mathcal{D}}$:

$$\varphi(T) = \sum_{q=1}^{n} (-1)^q \Delta^\sharp (1 \times f)^\sharp K_{T_q}. \tag{10}$$

Лемма 5. *Число Лефшеца для вспомогательного комплекса Дольбо дается формулой*

$$L_{\mathrm{p}}(f^\sharp) = \mathrm{p.v.} \int_{\mathcal{D}} \Delta^\sharp \bar{\partial}'_\zeta (1 \times f)^\sharp K_{T_1} - \mathrm{p.v.} \int_{\mathcal{D}} d\varphi(T), \tag{11}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Так как $f^\sharp \circ S$ есть сглаживающий эндоморфизм (2), то из лемм 3 и 4 следует, что

$$L_{\mathrm{p}}(f^\sharp) = \sum_{q=1}^{n} (-1)^q \operatorname{tr} f_q^\sharp \circ S_q = \int_{\mathcal{D}} \sum_{q=1}^{n} (-1)^q \Delta^\sharp (1 \times f)^\sharp K_{S_q}. \tag{12}$$

По предположению множество $\mathrm{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})$ имеет нулевую меру. Так как подынтегральное выражение в (12) принадлежит классу $L^1(\mathcal{D})$, получим

$$L_{\mathrm{p}}(f^\sharp) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \sum_{q=1}^{n} (-1)^q \Delta^\sharp (1 \times f)^\sharp K_{S_q},$$

где U_ε есть множество всех точек $\zeta \in \mathcal{D}$, расстояние которых до $\mathrm{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})$ меньше чем ε.

Сейчас можно использовать равенства (8) для вычисления подынтегрального выражения в последнем интеграле. Пусть $(\zeta, z) \in (\mathcal{D} \times \mathcal{D}) \setminus \Delta$ есть произвольная точка. Возьмем дифференциальную форму $u \in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$ степени $q \geq 0$, которая имеет носитель в малом шаре, окружающем точку ζ, и равна нулю вблизи z. Так как особенности K_{T_q} лежат на Δ, получаем по формуле Стокса соотношения

$$\begin{aligned} P_{q+1}\bar{\partial} u + \partial P_q u &= T_{q+1}\bar{\partial} u + \partial T_q u = \\ &= \int_{\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge \Big(\bar{\partial}'_\zeta K_{T_{q+1}}(\zeta, z) + \bar{\partial}_z K_{T_q}(\zeta, z) \Big) = \\ &= -\int_{\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge K_{S_q}(\zeta, z), \end{aligned}$$

где $\bar{\partial}'_\zeta = (-1)^{q-1} \bar{\partial}_\zeta$ есть транспонированный оператор к $\bar{\partial}$ на формах бистепени $(0, q)$. Отсюда следует, что равенство

$$-K_{S_q} = \bar{\partial}'_\zeta K_{T_{q+1}} + \bar{\partial}_z K_{T_q}$$

справедливо на $\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon$, поскольку

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \sum_{q=1}^{n} (-1)^q \Delta^\sharp (1 \times f)^\sharp K_{S_q} = \\ &\quad = -\int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \sum_{q=1}^{n} (-1)^q \Delta^\sharp \left(\bar{\partial}_z (1 \times f)^\sharp K_{T_q} - \bar{\partial}'_\zeta (1 \times f)^\sharp K_{T_q} \right) + \Delta^\sharp \bar{\partial}'_\zeta (1 \times f)^\sharp K_{T_1} = \\ &\quad = -\int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \bar{\partial} \Big(\sum_{q=1}^{n} (-1)^q \Delta^\sharp (1 \times f)^\sharp K_{T_q} \Big) + \Delta^\sharp \bar{\partial}'_\zeta (1 \times f)^\sharp K_{T_1}. \end{aligned}$$

Дифференциальная форма в круглых скобках в последнем интеграле есть в точности $\varphi(T)$. Так как она имеет бистепень $(n, n-1)$, то можно заменить $\bar{\partial}$ на полный дифференциал d, откуда и следует лемма.

□

Для T_q, заданного в (4), как следует из (3), имеем, что

$$\begin{aligned}\varphi(T) &= \Delta^\sharp(1\times f)^\sharp\sum_{q=1}^{n}(-1)^q K_{T_q} = \\ &= \Delta^\sharp(1\times f)^\sharp\sum_{q=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\omega'_{q-1}\Big(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\Big)\wedge d\zeta = \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\omega'\Big(\frac{\overline{\zeta-f(\zeta)}}{|\zeta-f(\zeta)|^2}\Big)\wedge d\zeta = \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\overline{\zeta_j-f_j(\zeta)}}{|\zeta-f(\zeta)|^{2n}}d\zeta\wedge d\overline{(\zeta-f(\zeta))}[j],\end{aligned}$$

т.е. форма неполного логарифмического вычета.

Как отмечалось, эндоморфизм $f^\sharp$ на голоморфных функциях в $\mathcal{D}$, который является C^∞-отображением вплоть до границы, не имеет регулярного следа, поскольку данное пространство бесконечномерно. Более того, нет канонической регуляризации этого следа. Поэтому мы можем ввести регуляризованный след из чисто эвристических соображений. На гладких функциях $f^\sharp$ имеет ядро $\delta(\zeta - f(z))$, поэтому его след есть

$$\int_{\mathcal{D}}\delta(\zeta-f(\zeta))dv,$$

где $v=(2i)^{-n}d\bar\zeta\wedge d\zeta$ — форма объема в $\mathcal{D}$. На голоморфных функциях в $\mathcal{D}$, гладких вплоть до границы, функционал Дирака не имеет единственного представления. Любое интегральное представление для голоморфных функций может быть построено как представление дельта-функции. Наиболее удобны из них интегральные представления, ядра которых голоморфны по внешнему переменному z. Они определяют проекцию на пространство голоморфных функций. Это в точности так для случая компоненты F_0 параметрикса (8).

Определение 2. *Под регуляризованным следом эндоморфизма* $(Hf^\sharp)_0$ *на* $H^0(\mathcal{E}^\cdot(\overline{\mathcal{D}}))$ *будем понимать*

$$\widetilde{\operatorname{tr}}\,(Hf^\sharp)_0 = \text{p.v.}\int_{\partial\mathcal{D}}\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp K_{F_0} + \int_{\mathcal{D}}\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp K_{S_0}.$$

Сейчас можно определить полное число Левшеца $L_{\mathrm{t}}(f^\sharp)$ для эндоморфизма f^* комплекса Дольбо (1). А именно, положим

$$L_{\mathrm{t}}(f^\sharp) = \widetilde{\operatorname{tr}}\,(Hf^\sharp)_0 + L_{\mathrm{p}}(f^\sharp). \tag{13}$$

Лемма 6. *Из определения (13) следует, что*

$$L_{\mathrm{t}}(f^\sharp) = \text{p.v.}\int_{\partial\mathcal{D}}\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp K_{F_0} - \text{p.v.}\int_{\mathcal{D}}d\varphi(T).$$

Доказательство. Действительно, анализ, похожий на анализ в доказательстве леммы 5, показывает, что

$$\Delta^{\sharp}(1\times f)^{\sharp}K_{S_0} = -\Delta^{\sharp}\bar\partial'_{\zeta}(1\times f)^{\sharp}K_{T_1}$$

вне множества фиксированных точек f.

□

5. Локальные индексы

Предположим, что $\mathrm{Fix}(f,\overline{\mathcal{D}})$ состоит только из изолированных фиксированных точек. Для любой точки $p\in \mathrm{Fix}(f,\overline{\mathcal{D}})$ обозначим через $B(p,\varepsilon)$ шар радиуса $\varepsilon>0$ с центром в p. Если ε достаточно мало, то шар $B(p,\varepsilon)$ не содержит других фиксированных точек f, отличных от p. Положим

$$U_\varepsilon = \Big(\bigcup_{p\in \mathrm{Fix}(f,\overline{\mathcal{D}})} B(p,\varepsilon)\Big)\cap\mathcal{D}.$$

Используя лемму 5, по формуле Стокса получим

$$\begin{aligned}
-\mathrm{p.v.}\int_{\mathcal{D}} d\varphi(T) &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathcal{D}\setminus U_\varepsilon} d\varphi(T)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathcal{D}\setminus U_\varepsilon}\varphi(T) + \sum_{p\in \mathrm{Fix}(f,\overline{\mathcal{D}})}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(p,\varepsilon)\cap\mathcal{D}}\varphi(T)\\
&= -\mathrm{p.v.}\int_{\partial\mathcal{D}}\varphi(T) + \sum_{p\in \mathrm{Fix}(f,\overline{\mathcal{D}})}\mu_\imath(p), \qquad (14)
\end{aligned}$$

где

$$\mu_\imath(p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(p,\varepsilon)\cap\mathcal{D}}\varphi(T). \qquad (15)$$

Это выражение назовем *локальным индексом* фиксированной точки p.

Лемма 7. *Если $p\in\mathcal{D}$ есть простая фиксированная точка f, т.е.* $\det_{\mathbb{C}}(1-f'(p))\neq 0$, *тогда*

$$\mu_\imath(p) = \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1-f'(p))}.$$

Доказательство. Сделаем замену переменных в малой окрестности точки p по формуле $w=\zeta-f(\zeta)$. Так как p является простой фиксированной точкой f, то эта замена переменных биголоморфна вблизи p. Тогда по формуле Бохнера-Мартинелли

$$\begin{aligned}
\mu_\imath(p) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n}\int_{(1-f)_*\partial B(p,\varepsilon)}\frac{1}{\det_{\mathbb{C}}\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}(\zeta(w))}\,\omega'\Big(\frac{\overline{w}}{|w|^2}\Big)\wedge dw =\\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n}\int_{\partial B(0,\delta)}\frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1-f'(\zeta(w)))}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\overline{w_j}}{|w|^{2n}}dw\wedge d\overline{w}[j] =\\
&= \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1-f'(p))},
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Заметим, что дифференциальная форма $\varphi(T)$ в действительности замкнута в достаточно малой окрестности точки a. Следовательно, проблема вычисления $\mu_\imath(p)$ сводится, в общем. к вычислению так называемого вычета Гротендика. В книге [8, §6] дана алгебраическая интерпретация локального вычета в терминах следа конечного расширения (связанного с отображением f) поля ростков мероморфных функций в окрестности p.

Для фиксированных точек f на границе локальный индекс $\mu_\imath(p)$ зависит еще от того, будет ли точка p притягивающей или отталкивающей.

Лемма 8. *Если $p \in \partial\mathcal{D}$ есть простая фиксированная точка f, тогда*

$$\mu_\imath(p) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1-f'(p))}.$$

Доказательство. Сделаем снова замену переменных $w = \zeta - f(\zeta)$ в достаточно малой окрестности p. Это влечет, что

$$\begin{aligned}\mu_\imath(p) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{(1-f)_*\left(\partial B(p,\varepsilon)\cap\mathcal{D}\right)}\det{}_{\mathbb{C}}\frac{\partial\zeta}{\partial w}\,\omega'\Big(\frac{\overline{w}}{|w|^2}\Big)\wedge dw = \\ &= \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1-f'(p))}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n}\int\limits_{(1-f)_*\left(\partial B(p,\varepsilon)\cap\mathcal{D}\right)}\omega'\Big(\frac{\overline{w}}{|w|^2}\Big)\wedge dw.\end{aligned}$$

так как $\det_{\mathbb{C}}\zeta'(w)$ является гладким в окрестности $w = 0$. Голоморфное отображение $w = \zeta - f(\zeta)$ сохраняет ориентацию $\mathbb{C}^n$, поэтому предел в правой части не зависит от того, является ли p притягивающей или отталкивающей. Фактически известно, что этот предел равен $1/2$ [5], что и доказывает формулу.

□

6. Голоморфная формула Левшеца

Вернемся сейчас к вычислению полного числа Левшеца (13) для эндоморфизма f^* комплекса Дольбо (1). А именно, используя (14), легко получаем, что

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{t}}(f^\sharp) &= \mathrm{p.v.}\int\limits_{\partial\mathcal{D}}\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp K_{F_0} - \mathrm{p.v.}\int\limits_{\partial\mathcal{D}}\varphi(T) + \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\overline{\mathcal{D}})}\mu_\imath(p) = \\ &= \mathrm{p.v.}\int\limits_{\partial\mathcal{D}}\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp\Big(K_{F_0} - \sum_{q=1}^{n}(-1)^q K_{T_q}\Big) + \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\overline{\mathcal{D}})}\mu_\imath(p).\end{aligned}$$

Как уже отмечалось. ядра K_{F_q} исчезают для $q > 0$. С другой стороны, ядро K_{T_q}, если ограничиться границей $\mathcal{D}$, совпадает с $-K_{M_{q-1}}$. Поэтому получаем, что

$$\begin{aligned}\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp\Big(K_{F_0} - \sum_{q=1}^{n}(-1)^q K_{T_q}\Big) &= \Delta^\sharp(1\times f)^\sharp\Big(K_{F_0} - \sum_{q=1}^{n}(-1)^{q-1}K_{M_{q-1}}\Big) = \\ &= -\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q\Big(K_{M_q} - K_{F_q}\Big)\end{aligned}$$

вне множества $\mathrm{Fix}(f, \partial\mathcal{D})$ на границе. Так как $K_{M_q} - K_{F_q}$ есть разность между двумя формами Лере, го она точна [1]. Ее примитивная может быть легко найдена

$$\begin{aligned} \Delta^\sharp(1\times f)^\sharp \sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q\Big(K_{M_q} - K_{F_q}\Big) &= \\ &= \Delta^\sharp(1\times f)^\sharp \sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q K_{L_{q+1}\circ\bar\partial+\bar\partial\circ L_q} = \\ &= \sum_{q=1}^{n}(-1)^q\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp\Big(-\bar\partial'_\zeta K_{L_q} + \bar\partial_z K_{L_q}\Big) = \\ &= \bar\partial\Big(\sum_{q=1}^{n}(-1)^q\Delta^\sharp(1\times f)^\sharp K_{L_q}\Big). \end{aligned}$$

Можно заменить $\bar\partial$-дифференциал на полный дифференциал d для дифференциальной формы

$$\varphi(L) = \Delta^\sharp(1\times f)^\sharp \sum_{q=1}^{n}(-1)^q K_{L_q}.$$

имеющей бистепень $(n, n-1)$.

Это влечет основную формулу для числа Лефшеца $L_t(f^\sharp)$, а именно

$$L_t(f^\sharp) = \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\bar{\mathcal{D}})} \mu_\imath(p) - \mathrm{p.v.}\int_{\partial\mathcal{D}} d\varphi(L). \tag{16}$$

Теорема 1. *Число Лефшеца комплекса Дольбо дается формулой*

$$L_t(f^\sharp) = \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\mathcal{D})} \mu_\imath(p) + \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\partial\mathcal{D})} \mu_\imath(p) + \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\partial\mathcal{D})} \mu_b(p),$$

где

$$\begin{aligned} \mu_\imath(p) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(p,\varepsilon)\cap\mathcal{D}} \varphi(T), \\ \mu_b(p) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial(B(p,\varepsilon)\cap\partial\mathcal{D})} \varphi(L). \end{aligned}$$

Доказательство. По формуле Стокса получаем

$$-\mathrm{p.v.}\int_{\partial\mathcal{D}} d\varphi(L) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathcal{D}\setminus O_\varepsilon} d\varphi(L) =$$

$$= \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\partial\mathcal{D})} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial(B(p,\varepsilon)\cap\partial\mathcal{D})} \varphi(L) = \sum_{p\in\mathrm{Fix}(f,\partial\mathcal{D})} \mu_b(p),$$

что и требовалось.

□

В частности, если f не имеет фиксированных точек, то $L_t(f^\sharp) = 0$.

Для L_q, заданной формулой (4), это следует из (3) того, что

$$\begin{aligned}\varphi(L) &= \Delta^\sharp(1 \times f)^\sharp \sum_{q=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n} \int_0^1 \omega'_{q-1}\Big((1-\lambda)\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2} + \lambda\frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta, z)}\Big) \wedge d\zeta = \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi\imath)^n} \int_0^1 \omega'\Big((1-\lambda)\frac{\overline{\zeta - f(\zeta)}}{|\zeta - f(\zeta)|^2} + \lambda\frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta, f(\zeta))}\Big) \wedge d\zeta,\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\int_0^1 F(\cdot,\lambda) := \int_0^1 \Big(d\lambda \rfloor F(\cdot,\lambda)\Big) d\lambda$$

для дифференциальной формы $F(\cdot,\lambda)$ по λ среди других переменных. $d\lambda\rfloor$ является сверткой 1-form $d\lambda$.

7. Вычисление граничных вкладов

Если $p \in \partial\mathcal{D}$ есть простая фиксированная точка f, тогда локальный индекс $\mu_b(p)$ может быть точно вычислен достаточно тонкими, но элементарными методами анализа. Далее предположим, что $n > 1$.

Лемма 9. *Предположим, что f является голоморфным отображением $\mathcal{D}$, которое продолжается как C^∞-отображение на $\overline{\mathcal{D}}$, и p есть простая фиксированная точка f на $\partial\mathcal{D}$. Тогда*

$$\mu_b(p) = \begin{cases} +\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1 - f'(p))}, & \text{если } p \text{ притягивающая}, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1 - f'(p))}, & \text{если } p \text{ отталкивающая}. \end{cases}$$

Эта лемма разделяет вклад $\mu_\imath(p)$ и $\mu_b(p)$ для притягивающих и отталкивающих точек: отталкивающие точки отбрасываются, а притягивающие точки $p \in \partial\mathcal{D}$ удваиваются. Это приводит к элегантной формуле Левшеца для фиксированных точек комплекса Дольбо в случае, когда все фиксированные неподвижные точки f на границе простые.

Следствие 1. *Пусть f — голоморфное отображение $\mathcal{D}$, которое продолжается как C^∞-отображение на $\overline{\mathcal{D}}$. Если все фиксированные точки f $\overline{\mathcal{D}}$ простые, то*

$$L_t(f^\sharp) = \sum_{p \in \mathrm{Fix}(f,\mathcal{D}) \cup \mathrm{Fix}^{(a)}(f,\partial\mathcal{D})} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(1 - f'(p))}.$$

Доказательство. Комбинируя теорему 1 с леммами 7, 8 и 9, получаем требуемое.

□

Список литературы

[1] Айзенберг Л.А. *Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства*/ Л.А.Айзенберг, Ш.А.Даутов. - Новосибирск: Наука, 1975.

[2] Бреннер А.В. *Теорема о фиксированных точках для ∂_b-комплекса на строго псевдовыпуклых многообразиях*/ А.В.Бреннер // Успехи мат. наук. – 1988. – Т. 43. - №4. – С. 165.

[3] Бреннер А.В. *Теорема Атьи-Ботта-Лефшеца для многообразий с границей*/ А.В.Бреннер, М.А.Шубин // Функциональный анализ и прил. – 1981. - Т. 15. № 4. – С. 67-68.

[4] Бреннер А.В. *Формула Атьи-Ботта-Лефшеца для эллиптических комплексов на многообразиях с границей*/ А.В.Бреннер, М.А.Шубин // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1991. – Т. 38. - С. 119–183.

[5] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его приложения*/ А.М.Кытманов. – Новосибирск: Наука, 1992.

[6] Пинчук С.И. *Голоморфные отображения в $\mathbb{C}^n$ и проблема голоморфной эквивалентности* / С.И.Пинчук // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНИТИ, 1986. - Т. 9. - С. 195-224.

[7] Хенкин Г.М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе*/ Г.М.Хенкин // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 7. – С. 23–124.

[8] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения*/ А.К.Цих. – Новосибирск: Наука, 1989.

[9] Atiyah M. F. *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. 1*/ M.F.Atiyah, R.Bott // Ann. Math. – 1967. - V. 86. - №2. – P. 374–407.

[10] Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators. Vol. 3. Pseudo-differential operators*/ L.Hörmander. – Berlin et al. Springer-Verlag, 1985.

[11] Lefschetz S. *Intersections and transformations of complexes and manifolds*/ S.Lefschetz // Trans. Amer. Math. Soc. - 1926. – V. 28. - P. 1-49.

[12] Tarkhanov N.N. *Complexes of differential operators*/ N.N.Tarkhanov. – Dordrecht. NL. Kluwer Academic Publishers, 1995.