О РАЗРЕШИМОСТИ ПО ДОПУСТИМОСТИ БИМОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ С N-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ МОДАЛЬНОСТЯМИ*

М.И. Голованов**

Ранее автором данной работы исследовались допустимые правила вывода полимодальной логической системы $S5_nC$ с коммутирующими модальностями, а именно: логика $S5_nC$ является логикой с n модальностями $9_1,\ldots,9_n$, каждая из которых удовлетворяет аксиомам S5, кроме того, выполняются аксиомы коммутирования модальностей $9_i9_jp\equiv 9_j9_ip$, i,j=1...n. Для этой логики был получен положительный результат относительно разрешимости по допустимости правил вывода, в то время как среди расширений этой логики есть логики, неразрешимые по допустимости правил вывода [1]. В работе [2] установлено, что логика $S5_nC$ полна, финитно аппроксимируема и разрешима, однако не является локально конечной, построен алгоритмический критерий распознавания допустимости правил вывода. В работе [3] для логики $S5_2C$ найден базис допустимых правил и установлен ряд других свойств.

Цель данной работы - исследование допустимых правил вывода бимодальной логической системы $S5_2C_n$ с n-коммутативными модальностями, а именно: логика $S5_2C_n$ является логикой с двумя модальностями $9_0,9_1$, каждая из которых удовлетворяет аксиомам S5 и, кроме того, выполняются аксиомы n-коммутирования модальностей $(9_09_1)^np\equiv(9_19_0)^np$. В предлагаемой работе устанавливается, что логика $S5_2C_n$ полна, финитно аппроксимируема и разрешима. Основной результат: построен алгоритмический критерий распознавания допустимости правил вывода, т.е. логика $S5_2C_n$ является разрешимой относительно допустимости правил вывода.

Определения и обозначения

Нормальной n-логикой назовем логику с n модальностями $9_1,\ldots,9_n$, являющуюся расширением классического исчисления высказываний, полученным добавлением к аксиомам и правилам ИВ аксиом $9_i(p\to q)\to(9_ip\to 9_iq)$ (i=1,…,n) и правил $\vdash A\Rightarrow\vdash 9_iA$(i=1,…,n) и, возможно, некоторых дополнительных аксиом.

Пропозициональная логика S52Cn является расширением классического исчисления высказываний, при котором к логическим операторам ИВ добавляются два модальных оператора 9_0 и 9_i к логическим аксиомам ИВ добавляются аксиомы

$9_i(p\to q)\to(9_ip\to 9_iq)$, i = 0,1,
$9_ip\to p$, i = 0,1,
$\lozenge_i9_ip\to p$, i = 0,1,
$9_ip\to 9_i9_ip$, i = 0,1,
$(9_09_1)^np\equiv(9_19_0)^np$,

к правилам вывода ИВ добавляются правила $\vdash A\Rightarrow\vdash 9_iA$(i=0,1).

Мультиструктурой Крипке (n-шкалой или шкалой) будем называть набор $\langle U,R_1,\ldots,R_n\rangle$, где U - непустое множество и $R_1,\ldots,R_n$ - бинарные отношения на множестве U.

n-моделью Крипке, или моделью Крипке, когда нет необходимости указывать число отношений, заданных на основном множестве, будем называть набор $\langle U,R_1,\ldots,R_n,V\rangle$, где $\langle U,R_1,\ldots,R_n\rangle$ - n-шкала и V - отображение, ставящее в соответствие каждой пропозициональной переменной некоторое подмножество множества U. Отображение V будем называть означиванием. Истинность n-модальной формулы A в точке *t* n-модели **M** определяется как и в одномодальном случае, в частности, $(\mathbf{M},t)\Vdash 9_iA$, если $>x\,((t,x)\in R_i\to(\mathbf{M},x)\Vdash A)$.

Пусть $\mathbf{M}_1=\langle U',R'_1,\ldots,R'_n,V'\rangle$ и $\mathbf{M}_2=\langle U'',R''_1,\ldots,R''_n,V''\rangle$ модели Крипке. Будем говорить, что модель $\mathbf{M}=\langle U,R_1,\ldots,R_n,V\rangle$ является объединением непересекающихся моделей $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ $\mathbf{M}=\mathbf{M}_1\sqcup\mathbf{M}_2$, если $U=U'\cup U''$, $U'\cap U''=\varnothing$, $R_i|_{U'}=R'_i$, $R_i|_{U''}=R''_i$ и $V|_{U'}=V'$, $V|_{U''}=V''$.

Пусть $F=\langle U,R_1,\ldots,R_n\rangle$ - n-шкала и U^x - наименьшее подмножество множества U, содержащее x и удовлетворяющее условию: если $y\in U_x$ и $(y,z)\in R_i$, то $z\in U_x$. Кроме того положим $R_i^x=R_i\,|_{U^x}$. Конусом шкалы F с вершиной x назовем подшкалу $F^x=\left\langle U^x,R_1^x,\ldots,R_n^x\right\rangle$.

Пусть $\mathbf{M}=\langle U,R_1,\ldots,R_n,V\rangle$ - n-модель и $x\in U$. Через $\mathbf{M}^x$ обозначим модель $\left\langle U^x,R_1^x,\ldots,V'\right\rangle$, где $\left\langle U^x,R_1^x,\ldots,R_n^x\right\rangle$ является конусом шкалы $\langle U,R_1,\ldots,R_n\rangle$ с вершиной x и $V'(p_i)=V(p_i)\cap U^x$.

E будет обозначать произвольную одноэлементную модель, т.е. модель $\langle U,R_1,..,R_n,V\rangle$, у которой основное множество U является одноэлементным. Отметим, что если число пропозициональных переменных, на которых задается означивание V, равно n, то число одноэлементных моделей равно 2^n.

Пусть *For* обозначает множество всех бимодальных формул. Обозначим $M_k=\{9_k\varphi|\varphi\in For\cup\{\lozenge_k\psi|\psi\in For\}$, где k=0,1. Если X - некоторое множество формул, то положим $M_k(X)=M_k\cap X$. Множество X будем называть модально полным относительно модальности 9_k, если для любой формулы $\varphi\in M_k$, либо $\varphi\in X$, либо $\neg\varphi\in X$.

Полнота и разрешимость логики $S5_2C_n$

Лемма 1. Шкала $\langle F,R_0,R_1\rangle$ адекватна логике $L_n \Leftrightarrow$ отношения R_0,R_1 - рефлексивны, симметричны, транзитивны и удовлетворяют равенству $(R_0R_1)^n=(R_1R_0)^n$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость докажем от противного. Пусть на рассматриваемой шкале $(x,y)\in(R_0R_1)^n$, но $(x,y)\notin(R_1R_0)^n$. Введем означивание $V(p)=\{y\}$, тогда $x \Vdash_V (\Diamond_0\Diamond_1)^n p$, но $x \nVdash_V (\Diamond_1\Diamond_0)^n p$.

Лемма 2. Если $\langle F,R_0,R_1,V\rangle$ - модель адекватная логике $S5_2C_n$,и $F \nVdash_V \varphi$, то существует конечная модель $\overline{F}$ адекватная логике $S5_2C_n$, такая, что $\overline{F} \nVdash_V \varphi$.

Доказательство. Пусть $\langle F,R_0,R_1,V\rangle$ - модель, удовлетворяющая условиям леммы. В силу равенства $(R_0R_1)^n=(R_1R_0)^n$ отношение $(R_0R_1)^n$ является отношением эквивалентности на множестве F, поэтому конус $F^x=\{y|(x,y)\in(R_0R_1)^n\}$, где $x \nVdash_V \varphi$, является подмоделью модели F, удовлетворяющей условиям леммы. Профильтруем F^x по множеству подформул Φ формулы φ. Обозначим $[y]=\{z\in F^x|\forall\varphi\in\Phi\,(z\Vdash\varphi\Leftrightarrow x\Vdash\varphi)\}$, $\overline{F}^{x}=\{[y]|y\in F^x\}$. Положим для i=0,1 и произвольных $[u],[v]\in\overline{F}^{x}$ $[u]\,\overline{R}_i\,[v]$, если $\forall\varphi\in M_i(\Phi)\,(u\Vdash_V\varphi\Leftrightarrow v\Vdash_V\varphi)$. Означивание W на $\overline{F}^{x}$ зададим следующим: $W(p_i)=\{[y]|y\in V(p_i)\cap F^x\}$. Из определения отношения $\overline{R}_i$ следует если $(u,v)\in R_i$, то $([u],[v])\in\overline{R}_i$. Поскольку $\forall u,v\in F^x\,(u,v)\in(R_0R_1)^n$ и $(R_0R_1)^n=(R_1R_0)^n$, то $\forall[u],[v]\in\overline{F}^{x},([u],[v])\in(\overline{R}_0\overline{R}_1)^n$ и $((\overline{R}_0\overline{R}_1)^n=(\overline{R}_0\overline{R}_1)^n$. Следовательно конечная модель $\langle\overline{F}^{x},\overline{R}_0,\overline{R}_1,W\rangle$ адекватна логике $S5_2C_n$. Кроме того, $[x]\nVdash_V\varphi$.

Лемма 3. Фрейм канонической модели логики $S5_2C_n$ адекватен этой логике.

Доказательство. Рассмотрим каноническую модель *C* логики $S5_2$ с условием $(\Box_0\Box_1)^n p\equiv(\Box_1\Box_0)^n p$. Положим $\langle U_L,R_0^L,R_1^L\rangle$ - канонический фрейм логики $S5_2C_n$.

Положим, что для $X,Y\in U_L$ отношение XR_kY выполняется, если $M_k\cap X=M_k\cap Y$. Для удобства записи далее логику $S5_2C_n$ будем обозначать L_n. Обозначим $\overline{B}$ логическое замыкание в логике L_n множества формул B относительно modus ponens, то есть

$$\alpha\in\overline{B}\Leftrightarrow\exists\beta_1,\ldots,\beta_k\in B\ \ (L_n\vdash\beta_1,\ldots,\beta_k\to\alpha).$$

Пусть $(X,Y)\in(R_1R_0)^n$. Положим $T_0^0=M_0(X)$, $T_{2n-1}^0=M_1(Y)$, $T_{k+1}^0=M_{[k+1]}(\overline{T_k^0})$, где [k+1] - остаток от деления k+1 на 2, k=0,…,2n-3. Множества T_k^0 (k=0,…,2n-1) обладают следующими свойствами:

$$\text{если } \varphi\in T_k^0,\ \text{ то } \varphi\equiv\Box_{[k]}\varphi, \tag{1}$$

$$\text{если } \alpha,\beta\in T_k^0,\ \text{ то } \Box_{[k]}(\alpha\&\beta)\in T_k^0. \tag{2}$$

Свойство (1) следует из эквивалентностей $\Box_j\Diamond_j\equiv\Diamond_j\psi$, $\Box_j\Box_j\psi\equiv\Box_j\psi$ (j=0,1), поскольку любая формула $\varphi\in T_k^0$ имеет вид $\Diamond_{[k]}\psi$, либо $\Box_{[k]}\psi$ и для модальностей логики L_n справедливы указанные эквивалентности. Пусть $\alpha,\beta\in T_k^0$, k=0,…,2n-2, тогда из свойства (1) и аксиом S5 следует $\Box_{[k]}(\alpha\&\beta)\equiv\Box_{[k]}(\Box_{[k]}\alpha\&\Box_{[k]}\beta)\equiv\Box_{[k]}\Box_{[k]}\alpha\&\Box_{[k]}\Box_{[k]}\beta\equiv\alpha\&\beta$. Так как $\alpha,\beta\in\overline{T_{k-1}^0}$, то $\alpha\&\beta\in\overline{T_{k-1}^0}$ и значит $\Box_{[k]}(\alpha\&\beta)\in T_k^0$. Аналогично при k=2n-1.

В последовательности, $T_0^0,T_1^0,\ldots,T_{2n-2}^0$ объединение соседних множеств совместно по построению. Покажем, что $T_{2n-2}^0\cup T_{2n-1}^0$ - совместно. Предположим $T_{2n-2}^0\cup T_{2n-1}^0$ не совместно. Из свойств (1,2) следует $\exists t_{2n-2}\in T_{2n-2}^0$, $\exists t_{2n-1}\in T_{2n-1}^0$, такие, что $L_n\vdash t_{2n-1}\to\neg t_{2n-2}$. Следовательно, $L_n\vdash\Box_1 t_{2n-1}\to\Box_1\neg t_{2n-2}$. Отсюда, из свойства (1) множества T_{2n-1}^0 и полноты множества Y следует $\Box_1\neg t_{2n-2}\in T_{2n-1}^0\subseteq Y$. Поскольку $(X,Y)\in(R_1R_0)^n$, то $(\Diamond_1\Diamond_0)^n\Box_1\neg t_{2n-2}\in X$. Следовательно

$$X\ni(\Diamond_0\Diamond_1)^{n-1}\Diamond_0\Box_1\neg t_{2n-2}\equiv(\Diamond_0\Diamond_1)^n\Box_1\neg t_{2n-2}\equiv(\Diamond_1\Diamond_0)^n\Box_1\neg t_{2n-2}. \tag{3}$$

Но $L_n\vdash(\Diamond_0\Diamond_1)^{n-1}\Diamond_0\Box_1\neg t_{2n-2}\to(\Diamond_0\Diamond_1)^{n-1}\Diamond_0\neg t_{2n-2}$, следовательно$(\Diamond_0\Diamond_1)^{n-1}\Diamond_0\neg t_{2n-2}\in X$. Согласно построению множества T_{k+1}^0 (k=0,…2n-3), если $t_{k+1}\in T_{k+1}^0$, то $t_{k+1}\in\overline{T_k^0}$, но тогда существует $t_k\in T_k^0$, такое, что $L_n\vdash t_k\to t_{k+1}$; значит $L_n\vdash\Box_{[k]}t_k\to\Box_{[k]}t_{k+1}$ и $\Box_{[k]}t_{k+1}\in T_k^0$. Применяя последнее утверждение последовательно к t_{2n-2}, $\Box_1 t_{2n-2}$, $\Box_0\Box_1 t_{2n-2}$ и т.д., получим $(\Box_0\Box_1)^{n-1}t_{2n-2}\equiv(\Box_0\Box_1)^{n-1}\Box_0 t_{2n-2}\in T_0^0\subseteq X$. Последнее означает$(\Diamond_0\Diamond_1)^{n-1}\Diamond_0\neg t_{2n-2}\notin X$, что противоречит утверждению (3).

Далее индукцией по i для 0<i<ω построим семейство множеств $T_1^i,\ldots,T_{2n-2}^i$, удовлетворяющее условиям

S1) в последовательности $T_0^0, T_1^i, \ldots, T_{2n-2}^i, T_{2n-1}^0$, объединение любых двух соседних множеств совместно,

S2) $T_1^i = M_1(\overline{T_0^0 \cup T_1^{i-1}})$, $T_{k+1}^i = M_{[k+1]}(\overline{T_{k+1}^{i-1} \cup T_k^i})$, k=1,…,2n-3 для четных i>0; $T_{2n-2}^i = M_0(\overline{T_{2n-2}^{i-1} \cup T_{2n-1}^0})$, $T_k^i = M_{[k]}(\overline{T_k^{i-1} \cup T_{k+1}^i})$, k=1,…,2n-3 для нечетных i.

I. Пусть i - четное, множества $T_1^i, \ldots, T_{2n-2}^i$ построены и последовательность $T_1^i, \ldots, T_{2n-2}^i$ удовлетворяет условиям (S1), (S2). Множества $T_1^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}$ построим следующим образом:

$$T_{2n-2}^{i+1} = M_0(\overline{T_{2n-2}^i \cup T_{2n-1}^0}),\ T_k^{i+1} = M_{[k]}(\overline{T_k^i \cup T_{k+1}^{i+1}}),\ \text{k=1,…,2n-3.}$$

Покажем, что в последовательности $T_0^0, T_1^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}, T_{2n-1}^0$ объединение любых двух соседних множеств совместно. Объединение множеств T_{2n-2}^{i+1} и T_{2n-1}^0 совместно по предположению индукции. По построению справедливо включение $T_{2n-2}^{i+1} \subseteq \overline{T_{2n-2}^i \cup T_{2n-1}^0}$, следовательно множество $T_{2n-2}^{i+1} \cup T_{2n-1}^0$ совместно. Далее предположим k - наибольшее такое, что T_k^{i+1} несовместно, т.е. несовместно множество T_k^i, T_{k+1}^{i+1}. Тогда согласно свойствам (1,2} существуют $t_k \in T_k^i$ и $t_{k+1} \in T_{k+1}^{i+1}$, такие, что $L_n \vdash t_k \to \rceil t_{k+1}$. Но тогда $L_n \vdash 9_{[k]} t_k \to 9_{[k]} \rceil t_{k+1}$, следовательно $9_{[k]} \rceil t_{k+1}\, T_k^i$ и $\rceil t_{k+1} \in M_{[k+1]}(\overline{T_k^i})$ и по условию (S2) для четных i $\rceil t_{k+1} \in T_{k+1}^i \subseteq T_{k+1}^{i+1} \ni t_{k+1}$, что противоречит выбору k. Итак множества $T_1^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}$ совместны и следовательно совместны множества $T_k^{i+1} \cup T_{k+1}^{i+1}$ при 1≤k≤2n-3. В самом деле, если $T_k^{i+1} \cup T_{k+1}^{i+1}$ - несовместно с L_n, то найдутся формулы $t_k \in T_k^{i+1}$, $t_{k+1} \in T_{k+1}^{i+1}$, такие, что $L_n \vdash t_{k+1} \to \rceil t_k$, т.е. $\rceil t_k \in \overline{T_{k+1}^{i+1}}$. Но по построению $T_k^{i+1} = M_{[k]}(\overline{T_k^i \cup T_{k+1}^{i+1}})$ и в силу свойства (P1) $\rceil t_k \equiv 9_k \rceil t_k$. Следовательно $\rceil t_k \in T_k^{i+1}$ и T_k^{i+1} несовместно с L_n, что противоречит ранее доказанному. Предположим наконец, что $T_0^0 \cup T_1^{i+1}$ несовместно с L_n, тогда $\exists t_0 \in T_0^0$, $t_1 \in T_1^{i+1}$ такие, что $L_n \vdash t_0 \to \rceil t_1$. Но тогда $L_n \vdash 9_0 t_0 \to 9_0 \rceil t_1$,следовательно $9_0 \rceil t_1 \in T_0^0$ и $\rceil t_1 \in \overline{T_0^0}$. Из последнего включения согласно (S2) и (1) имеем $\rceil t_1 \in T_1^i \subseteq T_1^{i+1} \ni t_1$, что невозможно ввиду совместности T_1^{i+1}.

II. Пусть i - нечетное, множества $T_1^i, \ldots, T_{2n-2}^i$ построены и последовательность $T_1^i, \ldots, T_{2n-2}^i$ удовлетворяет условиям (S1), (S2): $T_{2n-2}^i = M_0(\overline{T_{2n-2}^{i-1} \cup T_{2n-1}^0})$, $T_k^i = M_{[k]}(\overline{T_k^{i-1} \cup T_{k+1}^i})$, k=1,…,2n-3.

Построение множеств $T_1^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}$ и соответствующие доказательства проведем симметрично (по возрастанию k).

Множества $T_1^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}$ построим следующим образом:

$$T_1^{i+1} = M_1(T_1^i \cup T_0^0), \tag{4}$$

$$T_{k+1}^{i+1} = M_{[k+1]}(\overline{T_{k+1}^i \cup T_k^{i+1}}), \qquad \text{k} = 1, \ldots, 2\text{n} - 3. \tag{5}$$

Покажем, что в последовательности $T_0^0, T_1^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}, T_{2n-1}^0$ объединение любых двух соседних множеств совместно. Объединение множеств T_0^0 и T_1^i совместно по предположениюиндукции. По построению справедливо включение $T_1^{i+1} \subseteq \overline{T_1^i \cup T_0^0}$, следовательно множество $T_0^0 \cup T_1^{i+1}$ совместно. Теперь покажем непротиворечивость множеств $T_2^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}$. Доказательство проведем от противного. Предположим k - наименьшее такое, что T_k^{i+1} - противоречиво, т.е. ввиду равенства (4) $T_k^i \cup T_{k-1}^{i+1}$ - противоречиво. Согласно свойствам (1,2} существуют $t_k \in T_k^i$ и $t_{k-1} \in T_{k-1}^{i+1}$, такие, что $L_n \vdash t_k \to \rceil t_{k-1}$. Отсюда получаем $L_n \vdash 9_{[k]} t_k \to 9_{[k]} \rceil t_{k-1}$, следовательно $9_{[k]} \rceil t_{k-1} \in T_k^i$ и $\rceil t_{k-1} \in M_{[k-1]}(\overline{T_k^i})$. Теперь из соотношений (4) и (S2) для нечетного i следуют включения $\rceil t_{k-1} \in T_{k-1}^i \subseteq T_{k-1}^{i+1} \ni t_{k-1}$, что противоречит выбору k. Итак множества $T_1^{i+1}, \ldots, T_{2n-2}^{i+1}$ совместны. Отсюда следует, что совместны и множества $T_k^{i+1} \cup T_{k+1}^{i+1}$ при 1≤k≤2n-3. В самом деле, если $T_k^{i+1} \cup T_{k+1}^{i+1}$ несовместно с L_n, то найдутся формулы $t_k \in T_k^{i+1}$, $t_{k+1} \in T_{k+1}^{i+1}$, такие, что $L_n \vdash t_k \to \urcorner t_{k+1}$. Но по построению $T_{k+1}^{i+1} = M_{[k+1]}(\overline{T_k^{i+1} \cup T_{k+1}^{i}})$. А так как по свойству (1) $\urcorner t_{k+1} \equiv \vartheta_{[k+1]} \urcorner t_{k+1}$, то $\urcorner t_{k+1} \in T_{k+1}^{i+1}$ и T_{k+1}^{i+1} несовместно с L_n, что противоречит доказанной ранее совместности T_{k+1}^{i+1}. Пусть $T_{2n-2}^{i+1} \cup T_{2n-1}^{0}$ несовместно с L_n, тогда $\exists t_{2n-2} \in T_{2n-2}^{i+1}$, $t_{2n-1} \in T_{2n-1}^{0}$, такие, что $L_n \vdash t_{2n-1} \to \urcorner t_{2n-2}$. Но тогда $L_n \vdash \vartheta_1 t_{2n-1} \to \vartheta_1 \urcorner t_{2n-2}$, а поскольку $M_1(\overline{T_{2n-1}^{0}}) = T_{2n-1}^{0}$, то $\vartheta_1 \urcorner t_{2n-2} \in T_{2n-1}^{0}$ и $\urcorner t_{2n-2} \in \overline{T_{2n-1}^{0}}$. Из соотношения (4) вытекает включение $T_{2n-2}^{i} \subseteq T_{2n-2}^{i+1} \ni t_{2n-2}$, т.е. $\urcorner t_{2n-2} \in T_{2n-2}^{i+1}$, что невозможно ввиду совместности T_{2n-2}^{i+1}.

Из построения множеств T_k^i следует включение $T_k^i \subseteq T_k^{i+1}$ k=1,…,2n-2. Положим $T_k^{\omega} = \bigcup_{i<\omega} T_k^i$.

Если $\varphi \in M_{[k]}(\overline{T_k^{\omega} \cup T_{k+1}^{\omega}})$, то в силу свойств (1,2) найдутся $t_k \in T_k^{\omega}$, $t_{k+1} \in T_{k+1}^{\omega}$, такие, что $L_n \vdash t_k, t_{k+1} \to \varphi$. В силу включений $T_k^i \subseteq T_k^{i+1}$ найдется такое j, что $t_k \in T_k^i \subseteq T_k^{2j}$, $t_{k+1} \in T_{k+1}^{2j+1}$, откуда следует включение $\varphi \in M_{[k]}(\overline{T_k^{2j} \cup T_{k+1}^{2j+1}}) = T_k^{2j+1}$, и следовательно множество $T_k^{\omega} \cup T_{k+1}^{\omega}$ непротиворечиво. Кроме того получаем включение $M_{[k+1]}(\overline{T_k^{\omega} \cup T_{k+1}^{\omega}}) \subseteq T_k^{\omega}$. Обратное включение очевидно. Имеем равенство $M_{[k]}(\overline{T_k^{\omega} \cup T_{k+1}^{\omega}}) = T_k^{\omega}$. Аналогично доказывается $M_{[k+1]}(\overline{T_k^{\omega} \cup T_{k+1}^{\omega}}) = T_{k+1}^{\omega}$.

Для четного i имеем $T_1^i = M_1(\overline{T_0^0 \cup T_1^{i-1}})$.

Для нечетного i $T_{2n-2}^i = M_0(\overline{T_{2n-2}^{i-1} \cup T_{2n-1}^{0}})$. В частности имеем $M_{[k]}(\overline{T_k^{\omega}}) = T_k^{\omega}$.

Итак в последовательности $T_0^0, T_1^{\omega}, \dots, T_{2n-2}^{\omega}, T_{2n-1}^{0}$ объединение соседних множеств совместно и $M_{[k]}(\overline{T_k^{\omega} \cup T_{k+1}^{\omega}}) \subseteq T_k^{\omega}$, 1≤k≤2n-2.

Лемма 4. Пусть $U_0, \dots, U_m$ - множества формул, удовлетворяющие условиям:

1) $M_{[k]}(\overline{U_k}) = U_k$, k=0,\dots ,m,

2) $M_{[k]}(\overline{U_{k+1}}) \subseteq U_k$, $M_{[k+1]}(\overline{U_k}) \subseteq U_{k+1}$, k=0,…,m-1,

3) $U_k \cup U_{k+1}$ совместно с L_n, k=0,…,m-1,

4) множества U_0 и U_m модально полны относительно ϑ_0 и $\vartheta_{[m]}$ соответственно.

Тогда существуют множества $V_0, \dots, V_m$, которые удовлетворяют условиям 1)-4) леммы и кроме того $U_k \subseteq V_k$, k=0,…,m, V_{m-1} - модально полное относительно $\vartheta_{[m-1]}$.

Пусть задана некоторая нумерация формул множества $M_{[m-1]}$:$\varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_l, \dots$. Положим $V_k^{\omega} = U_k$, k=0,…,m. Далее построим по индукции множества $V_0^{j\omega}, \dots, = U_m^{j\omega}$, удовлетворяющие условиям 1)-4) доказываемой леммы.

Если множества $V_0^{j\omega}, \dots, = U_m^{j\omega}$ уже построены и либо $\varphi_j \in V_{m-1}^{j\omega}$, либо $\urcorner\varphi_j \in V_{m-1}^{j\omega}$, то положим $V_k^{(j+1)\omega} = V_k^{j\omega}$ при k=0,…,m. В этом случае условия 1)-4) леммы выполняются по предположению индукции. Пусть φ_j, $\urcorner\varphi_j \notin V_{m-1}^{j\omega}$. В этом случае множество $V_{m-1}^{j\omega} \cup \{\varphi_j\} \cup V_m^{j\omega}$ совместно. В самом деле, если $V_{m-1}^{j\omega} \cup \{\varphi_j\} \cup V_m^{j\omega}$ несовместно, то существуют $t_{m-1} \in V_{m-1}^{j\omega}$, $t_m \in V_m^{j\omega}$, такие, что $L_n \vdash t_m \to (t_{m-1} \to \urcorner\varphi_j)$. В этом случае $t_{m-1} \to \urcorner\varphi_j \in M_{m-1}(\overline{V_m^{j\omega}})$ и в силу условий 1), 2) леммы имеем $\urcorner\varphi_j \in V_{m-1}^{j\omega}$ в противоречии с выбором φ_j. Теперь положим $V_m^{j\omega+1} = V_m^{j\omega}$ и $V_{m-1}^{j\omega+1} = M_{[m-1]}(\overline{V_{m-1}^{j\omega} \cup \{\varphi_j\} \cup V_m^{j\omega+1}})$. Построим далее множества $V_k^{j\omega+1} = M_{[k]}(\overline{V_k^{j\omega} \cup V_{k+1}^{j\omega+1}})$, k=1,…,m-2, $V_0^{j\omega+1} = V_0^{j\omega}$.

Покажем, что множества $V_0^{j\omega+1}, \dots, V_m^{j\omega+1}$ совместны. Множества $V_0^{j\omega+1}$ и $V_m^{j\omega+1}$ совместны поскольку совпадают с совместными по предположению индукции множествами $V_0^{j\omega}$ и $V_m^{j\omega}$ соответственно. $V_{m-1}^{j\omega+1}$ совместно поскольку выше была показана совместность ?{?j}? . Пусть k - наибольший индекс, для которого - несовместно, т.е. $V_k^{j\omega} \cup V_{k+1}^{j\omega+1}$ - несовместно, тогда в силу свойств \ref{ti1}, \ref{ti2} $\exists t_k \in V_k^{j\omega}$, $\exists t_{k+1} \in V_{k+1}^{j\omega+1}$, такие, что $L_n \vdash t_k \to \urcorner t_{k+1}$. Тогда $L_n \vdash \vartheta_{[k]} t_k \to \vartheta_{[k]} \urcorner t_{k+1}$ и поскольку $\vartheta_{[k]} t_k \equiv t_k \in V_k^{j\omega}$, то $\urcorner t_{k+1} \in M_{[k+1]}(\overline{V_k^{j\omega}})$. По предположению индукции и в силу способа построения рассматриваемой последовательности имеем $M_{[k+1]}(\overline{V_k^{j\omega}})$, $V_{k+1}^{j\omega} \subseteq V_{k+1}^{j\omega+1}$, т.е. $V_{k+1}^{j\omega+1}$ несовместно, что противоречит выбору k.

Из способа построения множеств $V_k^{j\omega+1}$ следует, что множества $V_k^{j\omega+1} \cup V_{k+1}^{j\omega+1}$ при k=1,…,m-1 совместны. Покажем совместность множества $V_0^{j\omega+1} \cup V_1^{j\omega+1}$. Если это множество несовместно, то найдутся $t_0 \in V_0^{j\omega+1}$ и $t_1 \in V_1^{j\omega+1}$, для которых $L_n \vdash t_0 \to t_1$. Тогда $L_n \vdash \vartheta_0 t_0 \to \vartheta_0 t_1$. Поскольку по индуктивному предположению $M_1(\overline{V_0^{j\omega}}) \subseteq V_1^{j\omega}$ и по построению $V_1^{j\omega} \subseteq V_1^{j\omega+1}$, то $\neg t_1 \in V_1^{j\omega+1}$ и множество $V_1^{j\omega+1}$ несовместно в противоречии с ранее доказанным.

Продолжим построения по индукции. Предположим, что множества $V_1^{j\omega+i}, \ldots, V_m^{j\omega+i}$ уже построены, объединение двух соседних совместно и справедливы включения $M_{k+1}(\overline{V_k^{j\omega+i}}) \subseteq V_{k+1}^{j\omega+i}$, для i четных; $M_k(\overline{V_{k+1}^{j\omega+i}}) \subseteq V_k^{j\omega+i}$ для i нечетных. Пусть i нечетное. Положим $V_0^{j\omega+i+1} = V_0^{j\omega+i}$, $V_{k+1}^{j\omega+i+1} = M_{[k+1]}(\overline{V_k^{j\omega+i+1} \cup V_{k+1}^{j\omega+i}})$, k=1,…,m-1, $V_m^{j\omega+i+1} = V_m^{j\omega+i}$. Множество $V_0^{j\omega+i+1}$ совместно в силу предположения индукции. Пусть k - наименьший индекс, для которого $V_k^{j\omega+i+1}$ - несовместно, т.е. $V_{k-1}^{j\omega+i+1} \cup V_k^{j\omega+i}$ - несовместно, тогда в силу свойств (1,2) $\exists t_{k-1} \in V_{k-1}^{j\omega+i+1}$, $\exists t_k \in V_k^{j\omega+i}$, такие, что $L_n \vdash t_k \to \neg t_{k-1}$. Тогда $L_n \vdash \vartheta_{[k]} t_k \to \vartheta_{[k]} \neg t_{k-1}$ и поскольку $\vartheta_{[k]} t_k \equiv t_k \in V_k^{j\omega+i}$, то $\neg t_{k-1} \in M_{[k-1]}(\overline{V_k^{j\omega+i}})$. По предположению индукциии в силу способа построения рассматриваемой последовательности имеем $M_{[k-1]}(\overline{V_k^{j\omega+i}}) \subseteq V_{k-1}^{j\omega+i} \subseteq V_{k-1}^{j\omega+i+1}$, т.е. $V_{k-1}^{j\omega+i+1}$ несовместно, что противоречит выбору k. Из способа построения множеств $V_k^{j\omega+i+1}$ следует, что множества $V_k^{j\omega+i+1} \cup V_{k+1}^{j\omega+i+1}$ совместны при k=0,…,m-2. Докажем совместность множества $V_{m-1}^{j\omega+i+1} \cup V_m^{j\omega+i+1}$. Предположим противное, тогда найдутся элементы $t_{m-1} \in V_{m-1}^{j\omega+i+1}$, $t_m \in V_m^{j\omega+i+1}$, для которых $L_n \vdash t_m \to \neg t_{m-1}$, т.е. $\neg t_{m-1} \in M_{[m-1]}(\overline{V_m^{j\omega+i}}) \subseteq V_{m-1}^{j\omega+i} \subseteq V_{m-1}^{j\omega+i+1}$, что противоречит совместности множества $V_{m-1}^{j\omega+i+1}$.

Пусть i четное. Положим $V_m^{j\omega+i+1} = V_m^{j\omega+i}$, $V_k^{j\omega+i+1} = M_{[k]}(\overline{V_k^{j\omega+i} \cup V_{k+1}^{j\omega+i+1}})$, k=m-1,…,1, $V_0^{j\omega+i+1} = V_0^{j\omega+i}$. Множество $V_m^{j\omega+i+1}$ совместно в силу предположения индукции. Пусть k - набольший индекс, для которого $V_k^{j\omega+i+1}$ - несовместно, т.е. $V_k^{j\omega+i} \cup V_{k+1}^{j\omega+i+1}$ - несовместно, тогда в силу свойств (1,2) $\exists t_k \in V_k^{j\omega+i}$, $\exists t_{k+1} \in V_{k+1}^{j\omega+i+1}$, такие, что $L_n \vdash t_k \to \neg t_{k+1}$. Тогда $L_n \vdash \vartheta_{[k]} t_k \to \vartheta_{[k]} \neg t_{k+1}$ и поскольку $\vartheta_{[k]} t_k \equiv t_k \in V_k^{j\omega+i}$, то $\neg t_{k+1} \in M_{[k+1]}(\overline{V_k^{j\omega+i}})$. По предположению индукции и в силу способа построения рассматриваемой последовательности имеем $M_{[k+1]}(\overline{V_k^{j\omega+i}}) \subseteq V_{k+1}^{j\omega+i} \subseteq V_{k+1}^{j\omega+i+1}$, т.е. $V_{k+1}^{j\omega+i+1}$ несовместно, что противоречит выбору k. Из способа построения множеств $V_k^{j\omega+i+1}$ следует, что множества $V_k^{j\omega+i+1} \cup V_{k+1}^{j\omega+i+1}$ совместны при k=m-1,…,1. Докажем совместность множества $V_0^{j\omega+i+1} \cup V_1^{j\omega+i+1}$. Предположим противное, тогда найдутся элементы $t_0 \in V_0^{j\omega+i+1}$, $t_1 \in V_1^{j\omega+i+1}$, для которых $L_n \vdash t_0 \to \neg t_1$, т.е. $\neg t_1 \in M_1(\overline{V_0^{j\omega+i}}) \subseteq V_1^{j\omega+i} \subseteq V_1^{j\omega+i+1}$, что противоречит совместности множества $V_1^{j\omega+i+1}$.

Из построения множеств $V_1^{j\omega+i}$ следует включение $V_k^{j\omega+i} \subseteq V_k^{j\omega+i+1}$, k=0,…,m. Положим $V_k^{(j+1)\omega} = \bigcup_{i<\omega} V_k^{j\omega+i}$.

Если $\varphi \in M_{[k]}(\overline{V_k^{(j+1)\omega} \cup V_{k+1}^{(j+1)\omega}})$, то в силу свойств (1,2) найдутся $t_k \in V_k^{j\omega+i}$, $t_{k+1} \in V_{k+1}^{j\omega+i}$, такие, что $L_n \vdash t_k, t_{k+1} \to \varphi$. В силу включений $V_k^{j\omega+i} \subseteq V_k^{j\omega+i+1}$ найдется такое s, что $t_k \in V_k^{j\omega+2s}$, $t_{k+1} \in V_{k+1}^{j\omega+2s+1}$, откуда следует включение $\varphi \in M_{[k]}(\overline{V_k^{j\omega+2s} \cup V_{k+1}^{j\omega+2s+1}}) = V_k^{j\omega+2s+1}$, и следовательно множество $V_k^{(j+1)\omega} \cup V_{k+1}^{(j+1)\omega}$ непротиворечиво. Кроме того получаем включение $M_{[k+1]}(\overline{V_k^{(j+1)\omega} \cup V_{k+1}^{(j+1)\omega}}) \subseteq V_k^{(j+1)\omega}$. Обратное включение очевидно. Имеем равенство $M_{[k]}(\overline{V_k^{(j+1)\omega} \cup V_{k+1}^{(j+1)\omega}}) = V_k^{(j+1)\omega}$. Аналогично доказывается $M_{[k+1]}(\overline{V_k^{(j+1)\omega} \cup V_{k+1}^{(j+1)\omega}}) = V_{k+1}^{(j+1)\omega}$.

В частности имеем $M_{[k]}(\overline{V_k^{(j+1)\omega}}) = V_k^{(j+1)\omega}$.

Если теперь возьмем $V_k = \bigcup_{j<\omega} V_k^{j\omega}$, то получим семейство множеств, удовлетворяющее заключению леммы.

Применяя лемму 4 к последовательности $T_0^{\omega},\ldots,T_{2n-1}^{\omega}$, получим последовательность совместных множеств $V_0^1,\ldots,V_{2n-2}^1,V_{2n-1}^1$, для которой справедливы включения $T_k^{\omega}\subseteq V_k^1\subseteq M_{[k]}$, объединения двух соседних множеств совместны и множества $V_0^1,V_{2n-2}^1,V_{2n-1}^1$, модально полны относительно модальностей ϑ_0, $\vartheta_{[2n-2]}$, $\vartheta_{[2n-1]}$ соответственно. Применяя затем лемму 4 к семейству множеств $W_0,W_1,W_2,\ldots,W_{2n-3},W_{2n-2},W_{2n-1}$, и продолжая этот процесс далее, через 2n-2 шага получим последовательность множеств $V_0^1,\ldots,V_{2n-2}^1$, в которой объединение двух соседних совместно, каждое из множеств модально полное относительно соответствующей модальности и $W_0=T_0^0$, $W_{2n-1}=T_{2n-1}^0$. Возьмем в канонической модели в качестве множества $X_{k,k+1}$ максимальное непротиворечивое множество, содержащее множество $W_k\cup W_{k+1}$ для k=0,…,2n-2. В соответствии с определением отношений R_0^L и R_1^L имеем $(X_{k,k+1},X_{k+1.k+2})\in R_{[k+1]}^L$, $(X_{2n-2,2n-1},Y)\in R_1^L$, т.е. $(X,Y)\in(R_0^LR_1^L)^n$. Лемма 3 доказана.

Приведем следствия доказанной леммы и леммы 2.

Следствие 5. Формула $\alpha\in S5_2C_n\Leftrightarrow\alpha$ истинна на всех адекватных $S5_2C_n$ моделях порядка $\leq 2^{f(\alpha)}$, где $f(\alpha)$ - число подформул формулы α.

Следствие 6. Логика$S5_2C_n$ финитно аппроксимируема.

Следствие 7. Логика $S5_2C_n$ разрешима.

Следствие 8. Модель Ch_f, являющаяся прямым объединением всех конечных попарно неизоморфных моделей логики $S5_2C_n$ является характеристической моделью этой логики.

Лемма 9. $\bigcap_{n<\omega}L_n=S5_2(=L)$.

Доказательство. $(\vartheta_0\vartheta_1)^n\equiv(\vartheta_1\vartheta_0)^n\Rightarrow(\vartheta_0\vartheta_1)^k\equiv(\vartheta_1\vartheta_0)^k$ для $k\leq n$. Следовательно $L_n\subseteq L_k$ при $k\geq n$. Если $\alpha\notin L$, то фильтрация канонической модели L по множеству подформул sub(α) дает конечную модель **M** адекватную L, такую, что $\mathbf{M}\not\Vdash\alpha$. Так как модель **M** конечна и $|\mathbf{M}|<f(\alpha)$, то $\exists n=n(\alpha)$, что $(R_0R_1)^n=(R_1R_0)^n$. Это означает, что модель **M** адекватна логике L_n и, следовательно, $\alpha\notin L_n$ и $\alpha\notin\bigcap_{i<\omega}L_i$.

Пусть $\alpha\notin L$. Тогда α истинна на всех конечных моделях логики L, имеющих порядок $\leq 2^{f(\alpha)}$, где $f(\alpha)$ - число подформул формулы α. Но для совокупности этих моделей $\exists n=n(\alpha)$, что $(R_0R_1)^n=(R_1R_0)^n$ для всех этих моделей. Пусть $m>n(\alpha)$. В соответствии со следствием \ref{crin} $\alpha\notin L_m\Leftrightarrow\alpha$ истинна на всех адекватных L_m моделях порядка $\leq 2^{f(\alpha)}$. Так как при $m\geq n$ $(R_0R_1)^m=(R_1R_0)^m$ для любой модели порядка $\leq 2^{f(\alpha)}$, то все модели порядка $\leq 2^{f(\alpha)}$ адекватны L_m. Итак $\forall m>n(\alpha)\alpha\in L_m$, следовательно $\alpha\in\bigcap_{n<\omega}L_n$ и $L\subseteq\bigcap_{n<\omega}L_n$. Лемма 9 доказана.

Теорема 10. Правило вывода A/B допустимо в $S5_2C_n\Leftrightarrow$A/B истинно на всех конечных адекватных логике $S5_2C_n$ моделях **N** следующего вида

1) **N**=**M**$\sqcup$**E** или **N**=**E**,

2) $\forall x\in$ **M** $\mathbf{M}^x=\mathbf{M}$,

3) означивание таково, что все элементы модели **N** являются формульными,

4) мощность подмодели **M** не больше 2^k, где k=|Sub(A/B)| - число всех подформул правила A/B.

Достаточность. Пусть $L_n=S5_2C_n$. Предположим, что правило $A(p_1,\ldots,p_m)/B(p_1,\ldots,p_m)$ - не допустимо в $S5_2C_n$. Следовательно существуют формулы $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$, такие, что $A(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\in L_n$, $B(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\notin L_n$. Введем на канонической модели $\mathbf{C}_{L_n}=\langle C_{L_n},R_0^{L_n},R_1^{L_n},V_{L_n}\rangle$ новое означивание $V'(p_i)=\{x|x\Vdash\varphi_i\}$. В соответствии с леммой 2 существует конечная модель, удовлетворяющая условию теоремы и адекватная логике L_n, на которой правило $A(p_1,\ldots,p_m)/B(p_1,\ldots,p_m)$ ложно.

Необходимость. Доказательство проведем от противного. Предположим существует модель, удовлетворяющая условиям теоремы, на которой правило ложно.

Рассмотрим m-характеристическую модель Ch_f, которая является прямым объединением всех возможных конечных моделей рассматриваемой логики.

Если **N**=**E**, то введем на модели Ch_f означивание $W(p_i)=\{x|\ x\Vdash\psi_i\}$, где ψ_i определены следующим образом:

$$p_i,\ \neg p_i,\ \text{ если } \mathbf{E}\not\Vdash p_i$$

$$p_i\#\neg p_i,\ \text{ если } \mathbf{E}\Vdash p_i$$

Поскольку при этом означивании формулы A и B во всех точках модели Ch_f будут иметь те же значения истинности, что и на модели **E**, модель характеристическая и означивание формульное, то правило будет недопустимым.

Пусть существует конечная модель **N**=**M**$\sqcup$**E** с означиванием V, при котором любой элемент -формулен, $|\mathbf{M}|\geq 1$, $\forall x\in$ **M** $\mathbf{M}^x=\mathbf{M}$ и $(\mathbf{N}\Vdash_V A)$, $(\mathbf{N}\not\Vdash_V B)$.

Модель Ch_f содержит модель **N** в качестве подмодели и означивание на **N** будет ограничением на **N** означивания на Ch_f. Далее удобно означивание на моделях Ch_f и **N** обозначать одним и тем же символом V.

Зададим на модели Ch_f формульное означивание W, при котором правило A/B будет ложно, т.е.$Ch_f \Vdash_W A(p_1,\ldots,p_m)$, в то время как $Ch_f \nVdash_W B(p_1,\ldots,p_m)$.

Модель $\mathbf{N}=\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$ является подмоделью модели Ch_f. Обозначим элементы подмодели $\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$ как $a_1,\ldots,a_{k+1}$, где $a_1,\ldots,a_{k+1}$ - элементы подмодели **M** и a_{k+1} -изолированная точка, т.е. единственный элемент подмодели **E**; и пусть $h_1,\ldots,h_{k+1}$ - формулы, которые выделяют элементы $a_1,\ldots,a_{k+1}$ при означивании V. Можно считать, что $h_1,\ldots,h_{k+1}$ являются конъюнкциями подформул правила A/B или их отрицаний.

Заметим, что формулы $h_1,\ldots,h_{k+1}$ являются выделяющими для $a_1,\ldots,a_{k+1}$ только внутри подмодели, но, вообще говоря, не на Ch_f. Далее положим $f_i=h_i , (\bigwedge_{j,j\neq i,k+1}\neg h_j)$, i=1,…,k, $f_{k+1}=\bigwedge^{k}_{j=1}\neg h_j$. Формулы $f_1,\ldots,f_{k+1}$ также являются выделяющими для $a_1,\ldots,a_{k+1}$.

Рассмотрим следующие формулы :

$g_a=f_a , (\bigwedge_{\neg(aR_0y)}\Diamond_0 f_y) , (9_0\bigvee_{aR_0y} f_y) , (\bigwedge_{\neg(aR_0y)}\neg\Diamond_0 f_y) , (\bigwedge_{aR_1y}\Diamond_1 f_y) , (9_1\bigvee_{aR_1y} f_y) , (\bigwedge_{\neg(aR_0y)}\neg\Diamond_0 f_y)$,

$\varphi_a=g_a , (\bigwedge_{x\in\mathbf{M}}(9_0 9_1)^n(f_x\rightarrow g_x))$, где $a\in\{a_1,\ldots,a_k\}$.

$\varphi_{a_{k+1}}=\neg(\bigvee_{a\in\mathbf{M}}\varphi_a)$ Элементы $a_1,\ldots,a_{k+1}$ однозначно определяются формулами $\varphi_{a_1},\ldots,\varphi_{a_{k+1}}$ в подмодели $\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$.

Формулы $\varphi_{a_1},\ldots,\varphi_{a_{k+1}}$ позволяют перенести формульным образом означивание с подмодели $\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$ на всю модель Ch_f, не изменив при этом означивания на подмодели $\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$. Будем полагать, что ограничение означивания V, заданного на модели Ch_f, на подмодель $\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$ совпадает с исходным означиванием на $\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$.

Построим формулы следующего вида :

$\psi_i=\bigvee_{a\in\mathbf{N},a\Vdash Vpi}\varphi_a$ (i=1...m)

Теперь на Ch_f зададим новое означивание W таким образом: $W(p_i)=\{x|x\Vdash\psi_i\}$ Это означивание будет формульным и, кроме того,$W(p_i)=V(p_i)$ на подмодели $\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$. А это значит, что на подмодели сохраняется истинность следующих утверждений:

$(\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E})\Vdash_W A(p_1,\ldots,p_m), (\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E})\nVdash_W B(p_1,\ldots,p_m)$

Докажем, что при новом означивании посылка $A(p_1,\ldots,p_m)$ будет истинна на всей модели Ch_f (заключение $B(p_1,\ldots,p_m)$ будет ложно, так как оно уже ложно на подмодели).

Справедлива следующая лемма :

Лемма 11. Пусть $\alpha(p_1,\ldots,p_m)$ – бимодальная формула, и x - элемент модели Ch_f такой, что $x\Vdash_V\varphi_a$, где $a\in\mathbf{M}\sqcup\mathbf{E}$. Тогда $x\Vdash_W\alpha\Leftrightarrow a\Vdash_V\alpha$. (*)

Доказательство. Будем доказывать индукцией по длине формулы α. Пусть $\alpha= p_j$. Если $a\Vdash_V p_j$, то Φ_j содержит в качестве дизъюнктивного члена φ_a, следовательно $x\Vdash_V\psi_j$ и в соответствии с определением означивания W $x\Vdash_W p_j$.

Допустим обратное утверждение неверно, т.е. $x\Vdash_W p_j$, но $a\nVdash_V p_j$. По определению означивания W $x\nVdash_V\psi_j$, следовательно существует $b\in\{a_1,\ldots,a_{k+1}\}$ такой, что $b\Vdash_V p_j$ и $x\Vdash_V\varphi_b$, $b\neq a$. Если $x\Vdash_V\varphi_{a_{k+1}}$, то $\forall c\in\{a_1,\ldots,a_k\} x\nVdash_V\varphi_c$, следовательно b,a\neq a_{k+1}. Так как f_a и f_b являются конъюнктивными членами \$\varphi_a$ и \$\varphi_b$, то $x\Vdash_V f_a$, $x\Vdash_V f_b$. По построению формул f_a и f_b имеем $x\Vdash_V h_a , \neg h_b$ и $x\Vdash_V h_b , \neg h_a$ соответственно. Полученное противоречие подтверждает справедливость первого шага индукции.

Доказательство для связок #, , , ¬, → тривиально.

Рассмотрим случай $x \Vdash_W\Diamond_i\alpha$. Пусть $K=\{z| x(R_0R_1)^n z\}$.

а) Положим вначале $a=a_{k+1}$, т.е. $\varphi_{a_{kk1}}=\neg(\bigvee_{a\in\mathbf{M}}\varphi_a)$. Тогда >$z\in K$ $z\Vdash_V(\bigvee_{a\in\mathbf{M}}\varphi_a)$. В самом деле, пусть $z\Vdash_V\varphi_a$, где $a\in\{a_1,\ldots,a_k\}$. Так как $(z,x)\in(R_1R_0)^n=(R_0R_1)^n$, то $\exists y_i\in K$, i=0,…,2n, такие, что $y_0=z$, $y_{2n}=x$ и $y_0R_0y_1R_1y_2\ldots y_{2n-1}R1y_{2n}$. Индукцией по i можно показать, что >y_i $\exists c_i\in\{a_1,\ldots,a_k\}$, что $y_i\Vdash_V\varphi_{c_i}$ что противоречит выбору x, при которых $\Vdash_V\varphi_{a_{k+1}}$. Следовательно в рассматриваемом случае означивание W на K будет постоянно, точнее $W(p_i)=K$, если ограничение $V|_{\mathbf{E}}=a_{k+1}$ и $W(p_i)=\mathbb{S}$ в противном случае. Но это означает, что истинность любой формулы на любой точке из K при означивании W будет совпадать с ее истинностью на a_{k+1} при означивании V.

б) Пусть $a\neq a_{k+1}$. Согласно определению истинностного значения модального оператора $\Diamond_i$ утверждение $x\Vdash_W\Diamond_i\alpha$ означает $\exists t((xR_it) , (t\Vdash_W\alpha))$. Так как $x\Vdash_V\varphi_a$ и φ_a в качестве конъюнктивного члена содержит формулу $9_i\bigvee ?_{aRiy} f_y$, то найдется $b\in\mathbf{M}$ такое, что aR_ib и $t\Vdash_V f_b$. Формула φ_a содержит конъюнктивный член $(9_0 9_1)^n(f_b\rightarrow g_b)$, кроме того поскольку R_0 и R_1 рефлексивны, то вместе с отношением xR_it имеем $x(9_0 9_1)^n$ t, следовательно $t\Vdash_V g_b$. Из условия $(9_0 9_1)^n=(9_1 9_0)^n$ следует, что для любых $u,v\in K$ справедливо $u(R_0R_1)^n v$ и значит для любого $u\in K$ $u\Vdash_V\bigwedge$_{x∈ {\goth

M}}$(9_0 9_1)^n(f_x \to g_x)$. Итак имеем $(t \Vdash_V \varphi_b)$, $(t \Vdash_W \alpha)$. По индуктивному предположению выполняется $b \Vdash_V \alpha$, и так как aR_ib, то по определению $a \Vdash_V \Diamond_i \alpha$.

Обратно, пусть $a \Vdash_V \Diamond_i \alpha$. Это означает $\exists b \in$ {\goth **M**}$:(aR_ib)$, $(b \Vdash_V \alpha)$. По условию $x \Vdash_V \varphi_a$, поскольку φ_a в качестве конъюнктивного члена содержит $\Diamond_i f_b$, то имеем $\exists z$: (xR_iz), $(z \Vdash_V f_b)$, и учитывая, что φ_a содержит конъюнктивный член $(9_0 9_1)^n(f_b \to g_b)$, имеем $z \Vdash_V g_b$, что влечет $z \Vdash_V \varphi_b$.

Получили $(b \Vdash_V \alpha)$, $(z \Vdash_V \varphi_b)$, тогда по индуктивному предположению $z \Vdash_W \alpha$, следовательно $x \Vdash_W \Diamond_i \alpha$. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы возьмем в качестве формулы α, рассматривавшейся в лемме, посылку $A(p_1,\ldots,p_m)$ правила A/B. Формула $A(p_1,\ldots,p_m)$ истинна на модели **M**\sqcup**E** при означивании V и в соответствии с доказанной леммой формула $A(p_1,\ldots,p_m)$ будет истинна на модели Ch_f при формульном означивании W.

Из теоремы 10 вытекает следующая

Теорема 12. Логика $S5_2C_n$ разрешима относительно допустимости правил вывода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rybakov V.V., Schemes of theorems for first order theories as propositional modal logic, Abstracts of the 1992 European Summer Meeting of ASL,Veszprem, Hungary, 1992, 64.
2. Alexeev P.A., Golovanov M.I. Polymodal Logic $S5_nC$, Sut Journal of Mathematics, V.33 (1997), N. 1, pp.1-9.
3. Golovanov M.I. Finite Bases of Admissible Rules for the Logic $S5_2C$, Lecture Notes in Comp. Sci., V.1234, Eds: S.Adian, A.Nerode, Logical Foudationsof Comp.Sci., Springer, 1997, pp.119-129.
4. Алексеев П.А., Голованов М.И. О допустимых правилах полимодальной логики $S5_nC$, Алгебра и логика, 1997, 36(5), стр. 483-493.