

*Работа посвящена одному из сложнейших вопросов физики – влиянию неинерциальности системы отсчета на результаты наблюдений и экспериментов. Это влияние не только исследуется теоретически, но и наглядно демонстрируется на не имеющей аналогов установке, в основу которой положено явление нечувствительности крутильного маятника к любым угловым ускорениям платформы при соответствующем подборе его положения на ней.*

В работе исследуется влияние сил инерции на различные механические процессы. Само явление инерции имеет фундаментальный характер, что отмечалось многими крупнейшими учеными, например Э.Махом, А.Эйнштейном и др. Несмотря на это, проблема обнаружения и учета неинерциальности присутствует в описании любого реального процесса.

Приступая к изучению законов динамики, обычно все движения рассматривают в одной и той же системе отсчета для того, чтобы установить общие закономерности, которым все эти движения подчиняются. Затем выясняют выполняются ли эти законы движения в других системах отсчета. При этом обращают внимание на то, как скажутся свойства самих этих систем на протекающие в них механические процессы [1-3].

Принцип относительности Галилея гласит, что во всех инерциальных системах отсчета все механические явления протекают одинаково. Поэтому преимущество любой инерциальной системы отсчета по сравнению с неинерциальными заключается в том, что в ней можно пользоваться законами Ньютона и следствиями, которые из них вытекают. Рассматривая же движения в неинерциальных системах отсчета, мы уже не можем пользоваться этими законами, так как они установлены для систем с другими свойствами. Простое описание физического явления в ускоренно движущейся системе отсчета приводит к введению новых понятий, в частности, наблюдатель в этом случае замечает появление новых сил. Переход к неинерциальным системам требует внесения существенных изменений в основные положения механики Ньютона, а именно: необходимо допущение о том, что для некоторых сил в этих системах нельзя указать тела, со стороны которых данная сила действует. Это допущение расширяет область применения механики Ньютона на произвольно движущиеся системы отсчета. Силы такого рода называются силами инерции, так как они действуют только в неинерциальных системах. Во всем остальном эти силы ничем не отличаются от сил классической механики. Они сообщают телам ускорения, так же как те обычные силы, с которыми мы привыкли иметь дело в инерциальных системах отсчета.

Такое представление связано с традиционным подходом к рассмотрению движения с ускорением. При любом изменении скорости можно выделить два предельных случая: скорость меняется только по величине или только по направлению. В соответствии с этим мы имеем чисто тангенциальное или чисто нормальное (радиальное) ускорения.

Силу инерции, действующую на материальную точку в произвольной системе отсчета, для удобства и лучшего понимания механических явлений, протекающих в этой системе, разбивают на составляющие [1]:

$$\mathbf{F}_{\text{инер}} = \mathbf{F}_{\text{пост}} + \mathbf{F}_{\text{кор}} + \mathbf{F}_{\text{ц}} + (-m[\boldsymbol{\omega}'\mathbf{r}]). \quad (1)$$

*Первая – поступательная сила инерции*  $\mathbf{F}_{\text{пост}} = -m\mathbf{v}_0'$ , возникающая из-за поступательного ускоренного движения системы и направленная против этого ускорения,  $\mathbf{v}_0'$  – ускорение системы. *Вторая – сила Кориолиса*  $\mathbf{F}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]$ . Она появляется только тогда, когда материальная точка движется со скоростью  $\mathbf{v}_{\text{отн}}$  относительно вращающейся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  системы отсчета. Ее направление перпендикулярно оси вращения системы отсчета и скорости движения относительно этой системы. *Третья сила*  $\mathbf{F}_{\text{ц}} = m\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}$  называется *центробежной силой инерции*. Она возникает во вращающихся системах отсчета и направлена вдоль радиуса  $\mathbf{r}$  от оси вращения системы. Последнее слагаемое  $(-m[\boldsymbol{\omega}'\mathbf{r}])$  обусловлено неравномерностью вращения системы отсчета ( $\boldsymbol{\omega}'$  – угловое ускорение) и не имеет специального названия.

С проявлением действия трех первых составляющих сил инерции мы знакомы достаточно хорошо. Системы с чисто тангенциальным ускорением встречаются довольно часто, вспомним хотя бы разгон и торможение автобуса. Однако ограничения здесь очевидны: слишком мало время действия сил, связанных с таким ускорением. Есть примеры и более длительного воздействия аналогичных сил. Например, перегрузки, которые испытывает космонавт при старте корабля. Несколько иначе обстоит дело, когда система имеет чисто радиальное ускорение. Здесь также хочется выделить два случая: постоянство угловой скорости в достаточно длительное время и, наоборот, изменение ее со временем, т.е. появление углового ускорения. В первом случае это так называемые карусельные системы отсчета, примером которой, прежде всего, является сама наша Земля. Именно в таких системах отсчета проявляется действие сил Кориолиса и центробежных сил.

Четвертая составляющая сил инерции в уравнении (1) менее знакома. В окружающем нас мире отсутствуют яркие примеры ее действия, и поэтому мы практически ничего о ней не знаем, кроме математического выражения. Для того чтобы исследовать характер ее влияния, нами была сконструирована установка, позволяющая наблюдать действие момента этой компоненты силы инерции на крутильный маятник.

Установка (см. рис.1) представляет собой платформу (рельс) (1), которая может совершать колебательные движения в горизонтальной плоскости, благодаря действию сил упругости двух пружин (2), возникающих при отклонении из положения равновесия. На рельсе расположен крутильный маятник с телом в виде тонкого стержня (3), колебания которого совершаются тоже в плоскости горизонта с помощью двух часовых пружин (4). Маятник закрепляется гайкой (6) на различных расстояниях от оси вращения платформы. Момент инерции и положение центра масс тела маятника может меняться с помощью насадок (5) и смещения стержня относительно оси вращения маятника. Для проведения эксперимента маятник устанавливается так, чтобы в состоянии равновесия его тело было направлено вдоль рельса.

На данной установке можно исследовать поведение маятника относительно платформы, т. е. его колебания относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с **переменно** вращающимся рельсом.

Рассмотрим горизонтальный маятник с телом в виде стержня, установленный на вращающейся платформе на произвольном расстоянии от ее оси. Маятник установлен так, что его стержень направлен по радиусу. При постоянной угловой скорости вращения платформы  $\omega$  маятник остается в положении покоя. Радиальное ускорение этого кругового движения направлено всегда точно вдоль маятника. Такое ускорение не может сообщить вращательный момент стержню. Напротив, при всяком изменении угловой скорости  $\omega$ , т.е. при вращении платформы с угловым ускорением  $d\omega/dt$ , маятник отбрасывается из его положения равновесия. Отбросы сразу же достигают значительной величины, так как теперь ускорения лежат поперек направления длины маятника. Однако соответствующим подбором величины момента инерции маятника  $I_0$  можно сделать его совершенно нечувствительным ко всякому угловому ускорению  $d\omega/dt$  [4].

Данное явление можно рассматривать относительно как инерциальной системы отсчета, так и неинерциальной, связанной с платформой, вращающейся с угловым ускорением  $d\omega/dt$ . Ниже приводится решение этой задачи в системе отсчета, вращающейся платформе, что нагляднее и проще.

Введем обозначения:  $m$  – масса маятника,  $s$  – расстояние между осью вращения маятника  $O$  и его центром масс  $S$ ,  $R$  – расстояние по радиусу от оси вращения платформы до оси маятника  $O$ ,  $I_s$  – момент инерции маятника относительно оси  $S$ , проходящей через его центр масс.

Как мы уже выяснили, выводить маятник из состояния равновесия может только составляющая силы инерции, которая связана с неравномерностью вращения. В неравномерно вращающейся с угловым ускорением  $d\omega/dt$  системе отсчета на материальную точку массой  $m$ , с радиус вектором  $\mathbf{r}$  действует четвертая компонента силы, равная (см. (1)):

$$\mathbf{F} = -m[d\omega/dt, \mathbf{r}]. \quad (2)$$

Разобьем тело маятника на элементы массой  $dm$ , как это показано на рис. 2. На каждый элемент массой  $dm$  согласно (2) действует сила  $d\mathbf{F} = -dm [d\omega/dt, (\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{s})]$ , где  $\mathbf{r}$  – вектор, соединяющий центр масс стержня маятника и его элемент  $dm$ . Эта сила создает элементарный момент внешней силы относительно точки  $O$ , действующий на стержень:

$$d\mathbf{M} = -dm [(\mathbf{s} + \mathbf{r}), [d\omega/dt, (\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{s})]]. \quad (3)$$

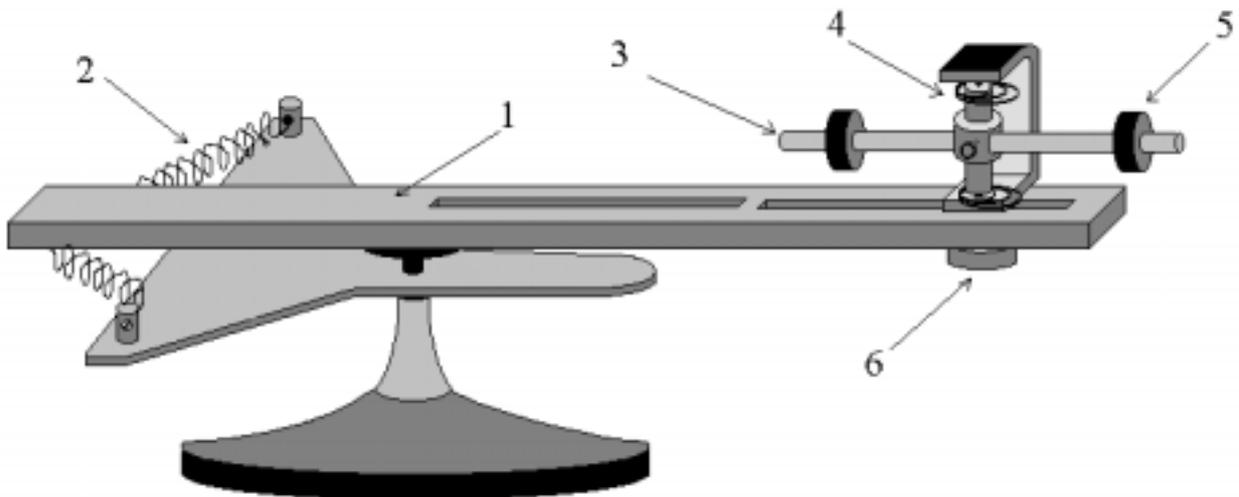


Рис. 1. Установка для изучения влияния сил инерции: 1 – подвижная платформа, 2 – две одинаковые упругие пружины, 3 – исследуемое тело, 4 – две часовые пружины, 5 – съемные насадки, 6 – гайка, закрепляющая маятник

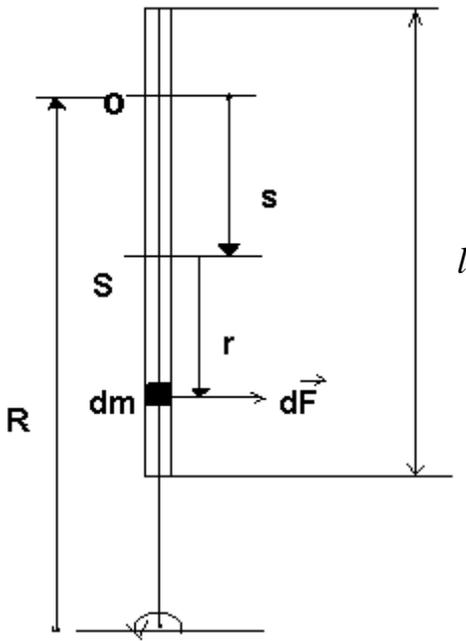


Рис. 2. Схема установки (вид сверху)

Разделим (5) на постоянный множитель  $(d\omega/dt)$ , получим:

$$\int (R - r - s)(s + r) dm = 0.$$

Интегрирование производится по всей длине  $l$  стержня маятника. После простых преобразований будем иметь:

$$\int (Rs + Rr - s^2 - 2sr - r^2) dm = \int (Rs - s^2) dm - \int r^2 dm + \int (Rr - 2sr) dm = 0. \quad (6)$$

Последнее слагаемое  $r(R-2s) \int r dm$  равно нулю, так как  $\int r dm = m r_{ц.м.}$ , где  $r_{ц.м.} = (1/m) \int r dm$  координата центра масс стержня. Начало координат помещено в центр масс, поэтому  $r_{ц.м.} = 0$ . С учетом этого равенство (6) переписывается:

$$(Rs - s^2) \int dm - \int r^2 dm = 0. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что  $\int dm = m$  – масса стержня, а  $\int r^2 dm = I_s$  – его момент инерции относительно центра масс, будем иметь:

$$I_s = ms(R - s). \quad (8)$$

Итак, мы получили основное соотношение, при выполнении которого маятник нечувствителен к любым угловым ускорениям платформы.

Используя теорему Гюйгенса – Штейнера, можно представить (8) и в ином виде. Обозначим момент инерции маятника относительно его оси вращения через  $I_0$ , тогда

$$I_0 = msR. \quad (9)$$

В случае однородного стержня с линейной плотностью  $\rho$  соотношение (7) переписывается:

$$\rho(Rs - s^2) \int_{-l/2}^{l/2} dr - \rho \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = 0,$$

или  $(Rs - s^2)l - \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = 0$ , интегрируя:

$$(Rs - s^2)l = l^3/12, \text{ или} \\ l^2 = 12 s(R - s). \quad (10)$$

Это же самое выражение легко вывести из (8) и иначе: простой подстановкой хорошо известного значения момента инерции  $I_0$  для тонкого стержня.

Выражения (9) и (10) получены в предположении, что поперечные размеры тела маятника много меньше его линейных размеров, хотя они остаются справедливыми и для тела, имеющего конечные поперечные размеры. Вывод в последнем случае немного сложнее, но в целом аналогичен сделанному выше.

Описанное физическое явление может быть использовано для экспериментального определения моментов инерции тел простой геометрической формы. Для этого в качестве тела маятника надо использовать исследуемое тело. Подбирая  $s$  и  $R$  так, чтобы маятник не реагировал на ускорение платформы, можно из соотношений (9) и (10) определить моменты инерции относительно как оси вращения, так и центра масс.

Данное явление можно наблюдать, приводя платформу в ускоренное вращение при помощи электромотора или каким-либо другим способом. Например, используя блок и перекинутую через него леску с гирей. Однако такие способы моделирования явления имеют существенный недостаток, связанный с кратковременным харак-

Из этого выражения видно, что направление  $dM$  либо совпадает с направлением вектора углового ускорения платформы, либо ему противоположно в зависимости от направления вектора  $(s + r)$ . Следовательно, суммарный момент  $M$ , отклоняющий маятник из положения равновесия, также либо сонаправлен с вектором  $d\omega/dt$ , либо ему противоположен, либо равен нулю, в зависимости от соотношения между моментом инерции маятника (относительно оси вращения)  $I_0$ ,  $R$  и  $s$ . Если же выполняется соотношение  $I_0 = msR$ , то суммарный момент сил равен нулю и маятник будет совершенно нечувствительным ко всякому угловому ускорению платформы.

Запишем соотношение (3) в скалярной форме, в проекции на ось вращения маятника  $O$ :

$$dM_0 = - dm d\omega/dt (R - r - s)(-s - r), \quad (4)$$

где  $dM_0$  – элементарный момент силы относительно оси вращения маятника.

Условие того, что маятник останется в состоянии покоя, – это условие равенства нулю полного момента сил относительно оси вращения в уравнении  $I d\omega/dt = M_0$ , где

$$M_0 = \int dM_0 = \int d\omega/dt (R - r - s)(s + r) dm = 0. \quad (5)$$

тером углового ускорения системы отсчета. Момент силы инерции в такой системе лишь отбросит маятник из положения равновесия, после чего можно будет наблюдать только его свободные затухающие колебания. Кроме того, возникают технические проблемы, так как для полного исследования необходимо сообщать платформе ускорения, существенно отличающиеся по величине.

В связи с этим, а также основываясь на опыте первых собранных нами установок, мы выбрали колебательный характер движения системы отсчета. Угловое ускорение при таком движении не постоянно, а меняет как свое численное значение, так и направление. На тело маятника в этом случае будет действовать переменный момент четвертой компоненты силы инерции, под действием которого маятник должен совершать *вынужденные колебания*. Если маятник установлен на рельсе так, что выполняется соотношение  $I_0 = msR$ , то он сохранит положение равновесия относительно платформы, как бы не менялось ее ускорение при любых колебаниях последней. Изменение же любого из параметров, характеризующих положение маятника  $I_0$ ,  $s$  или  $R$ , приведет к тому, что колебания платформы сразу же вызовут колебания маятника относительно нее. Подчеркнем тот факт, что определение моментов инерции в данном случае происходит через параметры установки, характеризующие положение тела на платформе.

Так как параметров, входящих в соотношение (9), немного, то его вполне можно использовать для нахождения момента инерции тела маятника, а в качестве тела маятника брать различные исследуемые тела. Тонкий стержень (см. на рис.1) закрепляют на карусели на некотором расстоянии  $R$  от ее центра, при этом центр масс стержня смещен от его точки крепления на расстояние  $s$  (см. рис.2). Затем выводят платформу из равновесного состояния отклонением ее на небольшой угол. Колебания платформы вызовут колебания маятника относительно нее. Изменяя параметр  $s$ , добиваются равновесного состояния маятника. Это положение будет характеризоваться значениями  $R_1$  и  $s_1$ . Изменяя несколько раз  $R_1$ , аналогичным образом каждый раз находят  $s_1$ . Зная массу стержня и имея набор значений  $R_1$  и  $s_1$ , легко построить графическую зависимость  $mRs = f(s^2)$ , используя метод наименьших квадратов (МНК). Эта зависимость должна быть линейной, причем  $mRs = I_s + ms^2$ , а это значит,  $I_s$  легко найти из графика. На рис. 3 представлен график обсуждаемой выше зависимости и сравнение полученного результата с расчетом по хорошо известному соотношению  $I_{\text{Стерж.}} = ml^2/12$  для тонкого стержня

Несмотря на то, что при вычислениях были использованы приближения идеальных моделей (бесконечно тонкий стержень и т.п.), теоретически рассчитанные значения  $I_{\text{Стерж.}}$  отличаются от полученных экспериментально  $I_s$  на величину, сравнимую с погрешностью эксперимента. Отклонение экспериментального значения момента инерции  $I_s$  от теоретического  $I_{\text{Стерж.}}$  чуть более 3%. Экспериментальные погрешности связаны, прежде всего, с тем, что ось маятника, используемого в работе, имеет размеры (ее диаметр 1,4 см) и достаточно массивна, что увеличивает реальный момент инерции тела маятника.

Закрепляя на стержне различные насадки, можно определить по той же методике их момент инерции. В этом случае, конечно, необходимо учесть, что момент инерции тела маятника “стержень-насадка” относительно оси вращения  $I_{\text{Отела}}$  равен:  $I_{\text{Отела}} = I_{\text{Остержень}} + I_{\text{Онасадка}}$ , где  $I_{\text{Остержень}}$  и  $I_{\text{Онасадка}}$  – моменты инерции стержня и насадки относительно одной и той же оси  $O$  (см. рис.2).

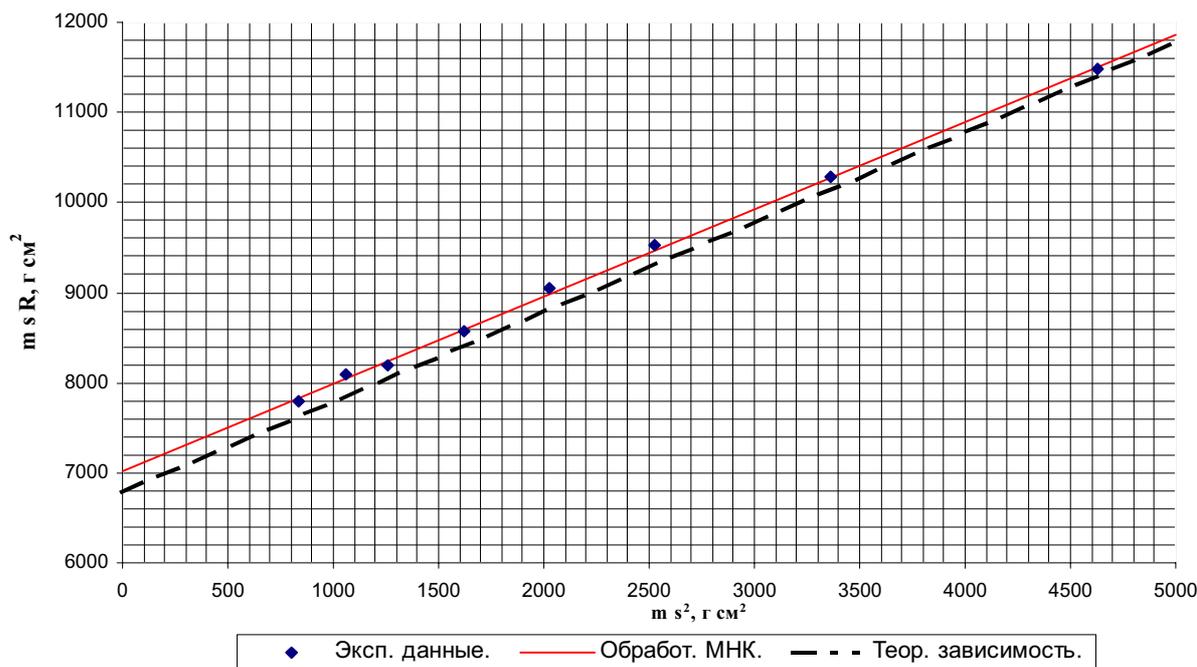


Рис.3 График зависимости  $mRs = f(s^2)$  для определения момента инерции тонкого стержня

Технические возможности установки позволяют использовать ее не только на лекциях в качестве демонстрационной, но и как лабораторную работу “Определение момента инерции тел с помощью крутильного маятника”. Основная задача лабораторной работы — наглядно познакомить студентов с особенностями действия одной из составляющих силы инерции, связанной с ускоренным вращением, и помочь освоить новый метод определения величины момента инерции.

Важными характеристиками экспериментальной установки являются моменты инерции платформы  $I_{\Pi}$  и момент инерции тела маятника  $I_0$  относительно собственных осей вращения. Для осуществления экспериментов принципиально, как эти параметры соотносятся между собой.

При исследовании поведения маятника в ускоренно вращающейся системе отсчета предполагалось, что колебания маятника не влияют на движение самой системы отсчета (платформы). На практике это предположение справедливо только, если:

$$I_{\Pi} / I_0 \gg 1. \quad (11)$$

Это следует из закона сохранения момента импульса всей системы “платформа-маятник”. Только в этом случае гармонические колебания рельса будут вызывать гармонические колебания маятника относительно него.

Если же  $I_{\Pi} \approx I_0$ , колебания маятника будут нарушать гармонический характер движения платформы. Следовательно, сами колебания маятника тоже будут совершаться по ангармоническому закону, который может быть довольно сложен. Это приведет к увеличению интервала положений маятника, в которых его колебания будут неразличимы, а значит, увеличится и погрешность эксперимента. Дело в том, что в положениях, близких к равновесному, вынуждающий момент силы инерции, действующей на маятник, мал. Хорошо заметными могут быть только гармонические колебания маятника при частотах, близких к резонансным.

Таким образом (11) — первое соотношение, которому должны удовлетворять параметры установки. На установке, сконструированной нами, это отношение приблизительно равно 50.

Немаловажным для проведения лабораторной работы, оказывается и соотношение собственных частот колебаний платформы и маятника,  $\nu$  и  $\nu_0$  соответственно.

Допустим, что (11) выполняется, а маятник установлен на рельсе на расстоянии от оси вращения платформы, близком к равновесному положению. Запишем уравнение движения маятника в неинерциальной системе отсчета, связанной с совершающим колебания рельсом:

$$I_0 (d^2\alpha/dt^2) = M_{\text{ин}} + M_{\text{тр}} + M_{\text{упр}}, \quad (12)$$

где  $\alpha$  — угол отклонения маятника,  $M_{\text{ин}}$  — момент силы инерции;  $M_{\text{тр}}$  — момент силы трения и сопротивления воздуха;  $M_{\text{упр}}$  — момент сил упругости пружин маятника.

Согласно уравнению (5):

$$M_{\text{ин}} = (msR - I_0) (d\omega/dt).$$

Если угол  $\alpha$  мал:

$$M_{\text{упр}} = -f\alpha; \quad M_{\text{тр}} = -\gamma (d\alpha/dt),$$

где  $f$  — модуль кручения пружин маятника;  $\gamma$  — коэффициент затухания маятника. С учетом этих равенств перепишем уравнение (12):

$$I_0 (d^2\alpha/dt^2) = (msR - I_0) (d\omega/dt) - \gamma (d\alpha/dt) - f\alpha, \text{ или} \\ (d^2\alpha/dt^2) + (\gamma/I_0) (d\alpha/dt) + (f/I_0) \alpha = (msR/I_0 - 1) (d\omega/dt), \quad (13)$$

Так как рельс совершает гармонические колебания с частотой  $\nu$ , то:

$$(d\omega/dt) = (d\omega/dt)_0 \cos(2\pi\nu t). \quad (14)$$

Подставим (14) в (13):

$$(d^2\alpha/dt^2) + (\gamma/I_0) (d\alpha/dt) + (f/I_0) \alpha = (msR/I_0 - 1) (d\omega/dt)_0 \cos(2\pi\nu t), \text{ или} \\ (d^2\alpha/dt^2) + (2\pi\nu_0) (d\alpha/dt) + (f/I_0) \alpha = (msR/I_0 - 1) (d\omega/dt)_0 \cos(2\pi\nu t). \quad (15)$$

Уравнение (15) — уравнение гармонического осциллятора, совершающего вынужденные колебания [2]. Его решение для установившихся колебаний запишется в виде:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(2\pi\nu t + \phi). \quad (16)$$

Амплитуда колебаний  $\alpha_0$  определяется выражением:

$$\alpha_0 = A / [(v_0^2 - \nu^2)^2 16 \pi^4 + 4 \pi^2 (\nu I_0 / \gamma)]^{1/2}, \quad (17)$$

где  $A = (msR/I_0 - 1) (d\omega/dt)_0$ .

Из уравнения (17) видно, что амплитуда колебаний возрастает при  $\nu \rightarrow \nu_0$ , достигая своего максимального значения при резонансе, когда  $\nu = \nu_0$ . В этом случае амплитуда возрастает настолько, что даже при незначительном несоответствии положения маятника равновесному, он будет совершать заметные колебания. Но такие точные параметры можно подобрать только для осуществления демонстрации на лекции, для того, чтобы явление было

наиболее ярким. Для проведения лабораторной работы придется ограничиться требованием приближенного равенства собственных частот, т. е. при проведении экспериментов мы меняем момент инерции тела маятника, а значит и  $\nu_0$ .

На установке, сконструированной нами:  $\nu \approx 0.59$  Гц, а  $\nu_0$  меняется в диапазоне от 0.40 Гц до 0.63 Гц.

Подробно описанная здесь оригинальная установка позволяет обнаружить присутствие силы инерции по ее действию на крутильный маятник. Выявленные закономерности проявления сил инерции дают возможность использовать полученные аналитические зависимости в лабораторной работе. Поэтому соответствующая работа по определению моментов инерции различных тел рекомендована для студентов первого курса Красноярского государственного университета как одна из лабораторных работ физического практикума.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. I. Механика. М.: Наука, 1974.
2. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. М.: Высш. шк., 1986.
3. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. I. М.: Наука, 1966.
4. Поль Р. В. Механика. М.: Наука, 1966.