

Представлена математическая модель, которая позволяет рассчитывать в плоскости магнитного экватора дрейфовые траектории вершин магнитных силовых трубок, заполненных заряженными частицами (например электронами) с учетом их питч-углового распределения и уровня геомагнитной активности и прогнозировать соответствующие времена дрейфа частиц с ночной стороны магнитосферы на дневную. Исследованы изменения средней энергии электронов от расстояния L и показателя питч-углового распределения при их дрейфе с $L_0 = 10$ в глубь магнитосферы с учетом работы сил давления, а также зависимость радиальной координаты L_p узла сепаратрисы от начальной энергии электронов и их питч-углового распределения. Далее, численно решается система двух обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений первого порядка, описывающих дрейфовые траектории вершин магнитных силовых трубок с электронами. С помощью расчетов установлено малое отличие траекторий вершин магнитных силовых трубок с электронами при показателях питч-углового распределения $\gamma = 0$ и $\gamma = 10$, но значительное влияние питч-углового распределения на время дрейфа электронов малых энергий с ночной стороны магнитосферы на дневную.

Моделирование процессов, происходящих в плазме околоземного космического пространства, - одно из фундаментальных направлений исследований в современной космической геофизике. К настоящему времени ни одна из тем этого широкого по охвату направления не решена окончательно, несмотря на то, что в ходе проведенных исследований накоплен большой теоретический и экспериментальный материал. В частности, одной из актуальных остается тема, связанная с изучением и моделированием движения заряженных частиц в магнитосфере Земли.

Расчеты траекторий движения частиц в магнитном поле Земли чрезвычайно сложны. Однако для частиц невысоких энергий Альвен [1] предложил метод, который позволяет решить задачу на основе представлений об адиабатических инвариантах.

В настоящее время в связи с работой [2] появилась возможность рассматривать в плоскости магнитного экватора движения не отдельных заряженных частиц, даже не их ве-душщих центров (как в [1]), а вершин магнитных силовых трубок, заполненных, например, протонами или электронами с произвольным питч-угловым распределением. Можно предположить, что такой подход будет тоже эффективным при решении некоторых задач физики плазмы. Продемонстрируем это, найдя численное решение задачи, обобщающей задачу Альвена [1]. Поэтому целью данной работы является исследование дрейфового движения вершин магнитных силовых трубок с электронами с учетом их питч-углового распределения в плоскости магнитного экватора Земли.

Рассмотрим сначала общую постановку задачи [2] при следующих физических допущениях.

1. Физические явления рассматриваются в космическом пространстве на расстоянии до 10 радиусов Земли от ее центра.
2. Магнитное поле Земли - дипольное, а силовые линии этого поля - эквипотенциальные.
3. Ось магнитного диполя перпендикулярна плоскости эклиптики.
4. Магнитосферное электрическое поле задано.
5. Дрейфовые движения (например электронов и протонов) из хвоста в глубь магнитосферы изучаются раздельно.
6. Заряженные частицы (электроны или протоны) дрейфуют в дипольном магнитном поле и заданном магнитосферном электрическом поле под действием электрического, градиентного и центробежного дрейфов.
7. Потоки высыпающихся в ионосферу заряженных частиц симметричны для северного и южного полушарий.
8. Распределение по энергиям для высыпающихся частиц магнитосферной плазмы отличается от максвелловского.
9. Питч-угловое распределение заряженных частиц аппроксимируется функцией Паркера.
10. Изменение средней энергии частиц в процессе дрейфа может вычисляться с учетом работы сил давления.
11. Влиянием ионосферы на магнитосферу пренебрегается.

Таким образом, как для электронов, так и для протонов решается несамосогласованная задача в заданном электромагнитном поле.

Работа [2] - один из вариантов обобщения задачи Альвена [1] для дипольного магнитного поля. Предложенная здесь в общем виде система обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет также описывать в плоскости магнитного экватора в отличие от Альвена дрейфовые траектории вершин магнитных силовых трубок с заряженными частицами (протонами или электронами) при их произвольном питч-угловом распределении:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{c}{M_E} R_E L^2 \frac{\partial V}{\partial \lambda}, \quad (1)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c}{M_E} R_E L(L \frac{\partial V}{\partial L} \pm 3w \frac{Q}{S}), \quad (2)$$

где

$$Q = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^9 \theta (1 + \cos^2 \theta)}{(1 + 3\cos^2 \theta)^2} \left(\frac{\sin^6 \theta}{\sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} d\theta, \quad (3)$$

$$S = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \left(\frac{\sin^6 \theta}{\sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}} \right)^{\frac{\gamma}{2}} d\theta, \quad (4)$$

$$\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad (5)$$

$$w = \frac{(\gamma + 4)\epsilon}{(\gamma + 3)q}, \quad (6)$$

L - параметр Мак-Илвейна или отношение экваториального расстояния от центра Земли до вершины магнитной силовой трубки в плоскости магнитного экватора к среднему радиусу Земли R_E (величина безразмерная); λ - азимутальный угол (характеризующий местное время в часах) или долгота в плоскости магнитного экватора; t - время вдоль дрейфовой траектории вершины магнитной силовой трубки; c - скорость света в вакууме; M_E - магнитный момент диполя Земли; V - потенциал электрического поля; ϵ - средняя энергия теплового движения частиц; q - заряд частицы.

В уравнении (2) знак "+" относится к электронам, знак "-" - к протонам. Причем средняя энергия частиц ϵ с учетом работы сил давления определяется в плоскости магнитного экватора следующим образом [3]:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\frac{3(\gamma+4)}{\gamma+5}}, \quad (7)$$

где ϵ_0 - начальная средняя энергия заряженных частиц в кэВ на некотором начальном расстоянии L_0 от центра Земли.

В выражениях (3), (4), (6) и (7) γ - это предложенный Паркером [4] показатель питч-углового распределения заряженных частиц. Если $\gamma = 0$, распределение заряженных частиц по питч-углам в магнитной силовой трубке изотропно. При $\gamma > 0$ преобладают заряженные частицы с большими питч-углами, а при $\gamma < 0$ - с малыми питч-углами.

Отношение Q (3) к S (4) в (2), вероятно, можно назвать геометрическим фактором используемой системы магнитных силовых линий, т.к. интегралы Q и S отражают лишь геометрию магнитных силовых линий. В данном случае - геометрию дипольного магнитного поля.

Для проведения конкретных расчетов по формулам (1) - (7) необходимо задать модель магнитосферного электрического поля. Поэтому для области околоземного космического пространства с $L \leq 10$ рассмотрим распределение суммарного электростатического потенциала, соответствующего электрическим полям коротации и магнитосферной конвекции.

Как известно [5], потенциал электрического поля коротации V_{Ω} для плоскости магнитного экватора может быть записан в следующем виде:

$$V_{\Omega} = -\frac{\Phi_0}{L}, \quad (8)$$

где $\Phi_0 = 92$ кВ.

Для электрического поля магнитосферной конвекции, как об этом указывалось, на-пример, в [5], характерно, что первоначальное однородное магнитосферное электрическое поле существенно искажается при $L < 10$ вследствие экранирования частицами плазменного слоя. В определенной мере этот эффект учитывается эмпиричес-

кой моделью Воланда [6]. Тогда для экранированного поля магнитосферной конвекции в плоскости магнитного экватора потенциал электрического поля магнитосферной конвекции V_c запишется таким образом:

$$V_c = \varphi_2 L^2 \sin \lambda, \quad (9)$$

где долгота λ отсчитывается на восток или против хода часовой стрелки от полуночного меридиана в плоскости магнитного экватора.

При этом зависимость φ_2 от геомагнитной активности, т.е. от K_p - индекса, определяется по формуле [7]:

$$\varphi_2 = \frac{0,045}{(1 - 0,16K_p + 0,01K_p^2)^3}, \quad \text{кВ.} \quad (10)$$

Но электрические поля, генерируемые в магнитосфере Земли, не являются чисто потенциальными и имеют вихревую компоненту, связанную с временными изменениями магнитного поля. Однако из-за того, что роль этой компоненты относительно мала [8], не будем ее учитывать и примем в дальнейшем, что суммарный электростатический потенциал V в плоскости геомагнитного экватора ($L \leq 10$) соответствует только полям коротации V_Ω (8) и магнитосферной конвекции V_c (9), (10), т.е.

$$V = V_\Omega + V_c = -\frac{\varphi_0}{L} + \varphi_2 L^2 \sin \lambda. \quad (11)$$

Итак, конкретная модель (11) магнитосферного электрического поля для проведения расчетов определена.

На этом математическая постановка задачи завершается, но надо иметь в виду, что можно использовать и другую модель электрического поля в магнитосфере Земли.

В качестве примера исследуем движения вершин магнитных силовых трубок только с электронами в плоскости магнитного экватора Земли. Тогда после подстановки электрического потенциала V (11) в уравнения (1) и (2)

с учетом соотношения [5] $\frac{cR_E}{M_E} = \frac{\Omega}{\varphi_0}$ получаем следующие дифференциальные нелинейные уравнения для расчетов:

$$\frac{dL}{dt} = -\Omega \frac{\varphi_2}{\varphi_0} L^4 \cos \lambda, \quad (12)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Omega + 2\Omega \frac{\varphi_2}{\varphi_0} L^3 \sin \lambda + 3 \frac{\Omega}{\varphi_0} w \frac{Q}{S} L, \quad (13)$$

где Ω - угловая скорость вращения Земли.

Выведенная таким образом система обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений первого порядка (12), (13) (вместе с формулами (3) - (8) и (10)) с необходимыми начальными условиями будет использована для исследования в экваториальной плоскости магнитосферы Земли движения вершин магнитных силовых трубок с электронами при постоянном значении их показателя питч-углового распределения γ . При этом электроны будут дрейфовать в дипольном магнитном поле и заданном магнитосферном электрическом поле (эмпирическая модель Воланда с учетом электрического поля коротации) под действием электрического, градиентного и центробежного дрейфов.

Для расчетов возьмем, например, экспериментальные данные [9], которые были получены на спутнике OGO-5. В этой работе были представлены типичные питч-угловые распределения приэкваториальных электронов с энергиями (79 ± 23) кэВ, зарегистрированные на ранней стадии фазы восстановления после магнитной бури. Среднее значение K_p - индекса геомагнитной активности в этот день было около 4 - [10], что соответствует умеренной геомагнитной активности. Обработка этих данных, произведенная в [11], показала, что показатель питч-углового распределения электронов γ изменяется в диапазоне примерно от $\gamma = 0$ до $\gamma = 10$. Исходя из этого, во всех расчетах, т.е. при энергиях $\epsilon_0 = 79; 10$ и 1 кэВ на $L_0 = 10$, будем полагать именно такой диапазон изменения показателя питч-углового распределения электронов γ .

Проведем предварительный анализ используемой математической модели, т.к. очень важен при исследовании траекторий вопрос, связанный с определением стационарных точек. В стационарных точках производные должны быть равны нулю. Для их определения в нашем случае надо правые части уравнений (12) и (13) прирав-

нять к нулю. В результате для электронов получается одна стационарная точка. Ее угловая координата ($\lambda_p = \frac{3\pi}{2}$

или $\lambda_p = 18$ ч) определяется из уравнения (12). Чтобы найти вторую полярную координату стационарной точки L_p , надо численно найти решение (корень) нелинейного уравнения

$$\Omega + 2\Omega \frac{\varphi_2}{\varphi_0} L^3 \sin \lambda + 3 \frac{\Omega}{\varphi_0} w \frac{Q}{S} L = 0 \quad (14)$$

с учетом формул (3) - (8) и (10).

Из сопоставления с предыдущими работами следует, что найденная стационарная точка - это узел сепаратрисы. Конкретные значения L_p - координаты узла сепаратрисы при необходимости будут указаны.

После этого анализа приступим к расчетам дрейфовых траекторий вершин магнитных силовых трубок с электронами при их заданном питч-угловом распределении. Для этого в работе используется метод Рунге-Кутты с переменным шагом.

Начнем с электронов, у которых энергия очень мала, т.е. в пределе будем считать, что $\epsilon_0 = 0$ кэВ. Тогда уравнение (13) существенно упрощается из-за отсутствия третьего слагаемого в его правой части, в то же время исчезает зависимость от показателя питч-углового распределения электронов в магнитной силовой трубке. Значит, в этой ситуации мы получаем распределение эквипотенциалей электрического поля в экваториальной плоскости магнитосферы или траектории вершин магнитных силовых трубок для электронов очень малых энергий (точнее с энергией $\epsilon_0 = 0$ кэВ на $L_0 = 10$) при индексе геомагнитной активности $K_p = 4$. Координаты узла сепаратрисы (при решении упрощенного уравнения (14)) таковы: $\lambda_p = \frac{3\pi}{2}$ или 18 ч, $L_p = 5,524$. Отметим, что сепаратриса

отделяет область замкнутой конвекции электронов вокруг Земли от области, где в основном происходит конвекция частиц в направлении к Солнцу из хвоста через дневную магнитопаузу. Около сепаратрисы две траектории принципиально разные. Одна из них огибает Землю, а другая - нет.

Движение энергичной плазмы в магнитосферном электрическом поле играет особую роль в переносе плазмы из хвоста и от границ магнитосферы в ее внутренние области. Такое конвективное движение внутри магнитосферы вызывает заметное ускорение частиц плазмы, что следует из сохранения первых двух адиабатических инвариантов [12].

Мы тоже исследуем это, увеличивая начальную энергию электронов и изменяя их показатель питч-углового распределения γ .

Сравнивая результаты расчетов между собой, видно, что траектории вершин силовых трубок энергичных электронов не такие, как у электронов малых энергий, вследствие влияния дрейфа за счет градиентов и кривизны магнитного поля. При этом у электронов скорость магнитного дрейфа складывается со скоростью коротации. Поэтому траектории вершин трубок с энергичными электронами подобны траекториям для частиц малых энергий, за исключением того, что область замкнутых траекторий расширяется. Ее радиальные расстояния от Земли возрастают с увеличением энергии электронов. Характерным является также то, что при всех значениях начальной энергии ϵ_0 и показателя питч-углового распределения γ траектории вершин магнитных силовых трубок с электронами в плоскости магнитного экватора четко делятся на замкнутые при малых радиальных расстояниях от Земли и открытые при больших расстояниях. Как и предполагалось, результаты этой работы на качественном физическом уровне совпадают с ранее полученными результатами, например [13], при исследовании движения ведущих центров электронов в плоскости магнитного экватора Земли.

Используемая математическая постановка задачи позволяет также исследовать время дрейфа электронов с ночной стороны магнитосферы ($L_0 = 10$) на дневную. Сравним эти времена при двух значениях показателя питч-углового распределения ($\gamma = 0$ и $\gamma = 10$) и двух значениях начальной энергии ($\epsilon_0 = 1$ кэВ и $\epsilon_0 = 10$ кэВ) для нескольких траекторий, которые начинаются на $L_0 = 10$. Разница во временах дрейфа на дневной стороне магнитосферы для электронов, имеющих начальную энергию $\epsilon_0 = 10$ кэВ, такова: для $\lambda_0 = 330^\circ$ примерно 24 мин, а для $\lambda_0 = 290^\circ$ - 1 ч 18 мин. Совершенно другая ситуация для электронов с начальной энергией $\epsilon_0 = 1$ кэВ. Здесь уже разница во временах дрейфа получилась такой: для $\lambda_0 = 340^\circ$ примерно 1 ч, а для $\lambda_0 = 320^\circ$ - 3 ч 41 мин. Значит, увеличение показателя питч-углового распределения электронов с $\gamma = 0$ до $\gamma = 10$ уменьшает время их дрейфа с ночной стороны магнитосферы на дневную, а для электронов малых энергий влияние питч-углового распределения оказывается значительным. Поэтому математическая модель ((12), (13) вместе с формулами (3) - (8) и (10)) может быть использована для определения конкретного времени дрейфа электронов с ночной стороны магнитосферы на дневную не только в зависимости от их показателя питч-углового распределения γ , но и от величины K_p - индекса геомагнитной активности.

Более того, модель (12), (13) вместе с формулами (3) - (8) и (10) при замене знака "+" на "-" в уравнении (13) между вторым и третьим слагаемыми позволяет рассчитывать в плоскости магнитного экватора дрейфовые траектории вершин магнитных силовых трубок, заполненных уже протонами или какими-либо другими положительно заряженными частицами, с учетом их питч-углового распределения и уровня геомагнитной активности, а также прогнозировать соответствующие времена дрейфа положительно заряженных частиц.

Полученные результаты дополняют результаты работ, выполненных в последнее время [14, 15].
Основные выводы следующие.

1. Рассмотренная математическая модель позволяет рассчитывать в плоскости магнитного экватора дрейфовые траектории вершин магнитных силовых трубок, заполненных заряженными частицами (например электронами или протонами) с учетом их питч-углового распределения и уровня геомагнитной активности и прогнозировать соответствующие времена дрейфа частиц с ночной стороны магнитосферы на дневную.
2. В качестве конкретного примера исследованы электроны, которые дрейфуют в дипольном магнитном поле Земли и заданном магнитосферном электрическом поле (эмпирическая модель Воланда с учетом электрического поля коротации) под действием электрического, градиентного и центробежного дрейфов.
3. С помощью расчетов установлено малое отличие дрейфовых траекторий вершин магнитных силовых трубок с электронами при показателях питч-углового распределения $\gamma = 0$ и $\gamma = 10$, но значительное влияние питч-углового распределения на время дрейфа электронов малых энергий с ночной стороны магнитосферы на дневную.
4. Работа имеет не только теоретическое значение, но и практическое, т.к. благодаря относительной простоте и зависимости от нескольких параметров математическая модель может быть использована (отдельно или как блок в больших программах) при проведении различных расчетов и прогнозов в космической геофизике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альвен Х. Космическая электродинамика. - М.: ИЛ, 1952.
2. Смолин С.В. Нестационарная магнитосферная конвекция заряженных частиц плазменного слоя и диффузия по питч-углам // Магнитосферные исследования. - М., 1988. - № 11. - С. 87-103.
3. Захаров В.Е. Исследование электродинамических аспектов ионосферно-магнитосферного взаимодействия: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Л., 1984.
4. Акасофу С.И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. Ч. 1. - М.: Мир, 1975.
5. Крикберг И.А., Тащилин А.В. Ионосфера и плазмосфера. - М.: Наука, 1984.
6. Volland H. Semiempirical models of magnetospheric electric fields // Geophys. Monogr. - 1979. - V. 21. - № 2. - P. 261.
7. Нишида А. Геомагнитный диагноз магнитосферы. - М.: Мир, 1980.
8. Harel M., Wolf R.A., Reiff P.H. Quantitative simulation of a magnetospheric substorm. 1. Model logic and overview // J. Geophys. Res. - 1981. - V. 86. - № A4. - P. 2217.
9. West H.I., Jr., Buck R.M., Walton J.R. Electron pitch angle distributions throughout the magnetosphere as observed on OGO 5 // J. Geophys. Res. - 1973. - V. 78. - P. 1064-1081.
10. Lincoln J.V., Editor. Geomagnetic and solar data // J. Geophys. Res. - 1968. - V. 73. - P. 5019.
11. Смолин С.В. Моделирование питч-угловой диффузии в магнитосфере Земли. - Красно-ярск: Редакц.-издат. предпр. "Либра", 1996.
12. Лайонс Л., Уильямс Д. Физика магнитосферы. Количественный подход. - М.: Мир, 1987.
13. Редерер Х. Динамика радиации, захваченной геомагнитным полем. - М.: Мир, 1972.
14. Chen M.W., Roeder J.L., Fennell J.F., Lyons L.R., Schulz M. Simulations of ring current proton pitch angle distributions // J. Geophys. Res. - 1998. - V. 103. - № A1. - P. 165-178.
15. Schulz M., Chen M.W. Phase-space density mappings for diffuse auroral electrons under strong pitch angle diffusion in Dungey's model magnetosphere // Adv. Space Res. - 1999. - V. 23. - № 10. - P. 1739-1746.