

В работе рассмотрен стационарный эффект Джозефсона в двойной барьерной SISIS структуре. Получена формула, описывающая сверхток Джозефсона в такой структуре. Проанализирована зависимость критического тока от расстояния между барьерами и от температуры. Показано, что зависимость критического тока от расстояния между барьерами имеет немонотонный характер и характеризуется наличием максимумов при резонансных значениях. При резонансном расстоянии между барьерами, температурная зависимость критического тока отличается от нерезонансного случая, причем характер изменений зависит от геометрии контакта.

Эффект Джозефсона представляет собой один из примеров проявления квантовых эффектов на макроскопическом уровне и имеет множество самых разнообразных применений - в элементах вычислительных машин, в точных измерениях магнитных полей, в генерации и детектировании электромагнитных волн и т.д.

В последнее время, в связи с развитием нанотехнологий, приобрели актуальность слоистые структуры, состоящие из последовательно соединенных контактов, в частности контакты типа S-I-S'-I-S, причем толщина внутреннего сверхпроводника S' может быть очень мала, порядка нескольких ангстрем. В таких условиях можно ожидать проявления эффектов резонансного туннелирования [1]. В работах [2-4] были исследованы свойства таких структур как в теоретическом, так и в экспериментальном планах. Однако при этом предполагалось, что критическая температура T_c внутреннего сверхпроводника меньше, чем критическая температура T_c электродов. Таким образом, в интервале температур от нуля до T_c контакт может находиться в двух существенно разных состояниях - S-I-S'-I-S и S-I-N-I-S. В данной работе рассмотрены стационарные свойства S-I-S-I-S контакта, когда в изучаемом интервале температур все три сверхпроводника находятся в сверхпроводящем состоянии.

Проанализируем туннельный переход типа SISIS, предполагая, что сверхпроводники (S) и барьеры (I) одинаковы. Пусть ось x расположена в направлении нормали к плоскости контактов и, следовательно, система трансляционно инвариантна в направлениях осей y и z . Если пренебречь внутренней структурой барьеров, то их потенциал можно описывать посредством двух дельта-функций,

$$U(x) = W[\delta(x+d) + \delta(x)], \quad (1)$$

где d - расстояние между барьерами. При этом "мощность" барьера характеризуется безразмерной константой $Z = mW / (k_F \hbar^2)$, где k_F - импульс Ферми.

Для решения задач теории сверхпроводимости в неоднородных системах, каковыми являются, в частности, джозефсоновские переходы, удобным формализмом является метод температурных функций Грина [5]. Учитывая, что рассматриваемая система неоднородна только в направлении оси x , уравнения Горькова запишем в виде

$$\begin{pmatrix} i\omega - H & \Delta(x) \\ -\Delta^*(x) & -i\omega - H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ F^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(x-x') \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

где $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi + U(x)$ - одночастичный гамильтониан с учетом потенциала барьеров, $\xi = (p_y^2 + p_z^2) / 2m - \mu$

- энергия поперечного движения, отсчитанная от уровня химпотенциала μ . $G = G_\omega(\xi; x, x')$ и $F_\omega^+ = F_\omega^+(\xi; x, x')$ - фурье-компоненты обычной и горьковской функций Грина по переменным $y-y'$ и $z-z'$, $\omega = (2n+1)\pi T$ - дискретные мацубаровские частоты ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), T - температура в энергетических единицах (постоянная Больцмана $k_B=1$).

Потенциал спаривания $\Delta(x)$ удовлетворяет уравнению самосогласования

$$\Delta^*(x) = \frac{m}{2\pi} |\lambda| T \sum_\omega \int d\xi F_\omega^+(\xi; x, x'), \quad (3)$$

где λ - куперовская константа притяжения между электронами. Выражение для плотности тока может быть вычислено по формуле

$$j(x) = \frac{ie}{2\pi\hbar} T \sum_\omega \int d\xi \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x} \right) G_\omega(\xi; x, x') \right]_{x'=x}, \quad (4)$$

где e и m - заряд и масса электрона соответственно.

Уравнения (2) являются нелинейными, поскольку в них входит потенциал спаривания $\Delta(x)$, в общем случае определяемый самосогласованным образом из уравнения (3). Чтобы привести (2) к линейному виду, обычно выбирают какой-либо модельный потенциал спаривания $\tilde{\Delta}(x)$. Такая процедура очень упрощает задачу, однако при этом необходимо помнить, что уравнение непрерывности для плотности тока в таком приближении имеет вид [6]

$$\text{div}(\bar{j}) = \frac{4e}{\hbar} T \sum_{\omega} \text{Im}[\tilde{\Delta}(\bar{r}) F_{\omega}^{+}(\bar{r}, \bar{r})] \quad (5)$$

Модельный потенциал спаривания выберем в приближении "прямоугольной щели" - будем считать, что Δ для всех трех сверхпроводников одинаков по модулю, $|\Delta_i| = \Delta_0$, отличаясь лишь фазами φ_i . Учитывая, что для симметричного контакта $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2$, и выбирая фазу промежуточного сверхпроводника $\varphi_2 = 0$, запишем потенциал спаривания в виде

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_0 e^{-i\varphi} & , \quad x < -d, \\ 0 & , \quad x = -d, \\ \Delta_0 & , \quad -d < x < 0, \\ 0 & , \quad x = 0, \\ \Delta_0 e^{i\varphi} & , \quad x > 0, \end{cases} \quad (6)$$

где φ - разность фаз параметра порядка соседних сверхпроводников. Таким образом, в нашем случае выражение (4) корректно определяет плотность тока, например, в точке $x=0$.

С учетом вида потенциала барьеров (1) и потенциала спаривания (6) уравнения Горькова (2) становятся линейными относительно функций G и F^+ , что позволяет получить точное в рамках сделанных предположений решение. Поскольку $U(x)$ отличен от нуля только в точках $x=-d$ и $x=0$, будем решать уравнения (2) отдельно для каждой из областей, где $U(x)=0$. Полагая для определенности, что $x>0$, запишем общее решение в виде

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ F_1^+ \end{pmatrix} = a_1 e^{kx} \begin{pmatrix} i\Delta_0 e^{-i\varphi} / (\omega + \Omega) \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 e^{qx} \begin{pmatrix} 1 \\ i\Delta_0 e^{i\varphi} / (\omega + \Omega) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} G_2 \\ F_2^+ \end{pmatrix} = (b_1 e^{kx} + b_2 e^{-kx}) \begin{pmatrix} i\Delta_0 / (\omega + \Omega) \\ 1 \end{pmatrix} + (b_3 e^{qx} + b_4 e^{-qx}) \begin{pmatrix} 1 \\ i\Delta_0 / (\omega + \Omega) \end{pmatrix} \quad -d < x < 0 \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} G_3 \\ F_3^+ \end{pmatrix} = c_1 e^{-kx} \begin{pmatrix} i\Delta_0 e^{i\varphi} / (\omega + \Omega) \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-qx} \begin{pmatrix} 1 \\ i\Delta_0 e^{-i\varphi} / (\omega + \Omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_0 \\ F_0^+ \end{pmatrix} \quad x > 0 \quad (9)$$

где $k = \sqrt{\beta(\xi + i\Omega)}$, $q = \sqrt{\beta(\xi - i\Omega)}$, $\Omega = \sqrt{\omega^2 + |\Delta|^2}$ и $\beta = 2m/\hbar^2$, $\text{Re}(k) > 0$, $\text{Re}(q) > 0$. Функции Грина G_0 и F_0^+ имеют вид

$$G_0 = -\beta \left[\frac{e^{-q|x-x'|}}{2q} + \frac{|\Delta|^2}{2\Omega(\omega + \Omega)} \left(\frac{e^{-k|x-x'|}}{2k} - \frac{e^{-q|x-x'|}}{2q} \right) \right], \quad (10)$$

$$F_0^+ = \beta \frac{i\Delta^*}{2\Omega} \left(\frac{e^{-k|x-x'|}}{2k} - \frac{e^{-q|x-x'|}}{2q} \right) \quad (11)$$

Произвольные константы a_i, b_i, c_i подлежат определению из граничных условий, которые можно получить из условия непрерывности функций Грина. В точке $x=0$ имеем

$$\left(\begin{matrix} G_3 \\ F_3^+ \end{matrix} \right) \Big|_{x=0} - \left(\begin{matrix} G_2 \\ F_2^+ \end{matrix} \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (12)$$

Второе условие получается интегрированием правой и левой частей уравнений (2) по малой окрестности точки $x=0$. Устремляя к нулю интервал интегрирования, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{matrix} G_2 \\ F_2^+ \end{matrix} \right) \Big|_{x=x'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\begin{matrix} G_1 \\ F_1^+ \end{matrix} \right) \Big|_{x=x'} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Аналогичные условия накладываются в точке $x=-d$.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (12)-(13) позволяет найти функцию Грина всей системы. Вычисление тока Джозефсона по формуле (4) в точке $x=0$ дает следующее выражение

$$j = \frac{ie}{2\pi\hbar} T \sum_{\omega} \int_{-\mu}^0 d\xi \left\{ -\frac{i\beta}{2} \frac{(B_1 \sin(\varphi) + 2B_2 \sin(2\varphi))}{B_0 + B_1(\cos(\varphi) - 1) + B_2(\cos(2\varphi) - 1)} \right\} \quad (14)$$

где коэффициенты B_i имеют вид

$$B_0 = (4\Omega)^4 \left((k_F Z + q)^2 - (k_F Z)^2 N_q^2 \right) \left((k_F Z + k)^2 - (k_F Z)^2 N_k^2 \right) \quad (15)$$

$$B_1 = 8\Delta_0^2 (-q + k) \left(8((-1 + N_q^2)(N_k^2 - 1)q + (N_q^2 - 1)(N_k^2 + 1)k)Z^2 k_F^2 - (q + k)((N_k^2 - 1)q + (-N_q^2 - 1)k)Zk_F - (-k + q)kq(-1 + N_k N_q) \right) \Omega^2 + \Delta_0^2 (-k + q)((N_k - 1)(N_q + 1)k + (N_k + 1)(N_q - 1)q)((N_k - 1)(N_q + 1)q - k(N_k + 1)(N_q - 1)), \quad (16)$$

$$B_2 = -2\Delta_0^2 (-q + k)^2 \left(((N_k - 1)(N_q + 1)q - k(N_k + 1)(N_q - 1))((N_k - 1)(N_q + 1)k - (N_k + 1)(N_q - 1)q)\Delta_0^2 + 16kqN_q N_k \Omega^2 \right), \quad (17)$$

где $N_k = e^{-dk}$, $N_q = e^{-dq}$.

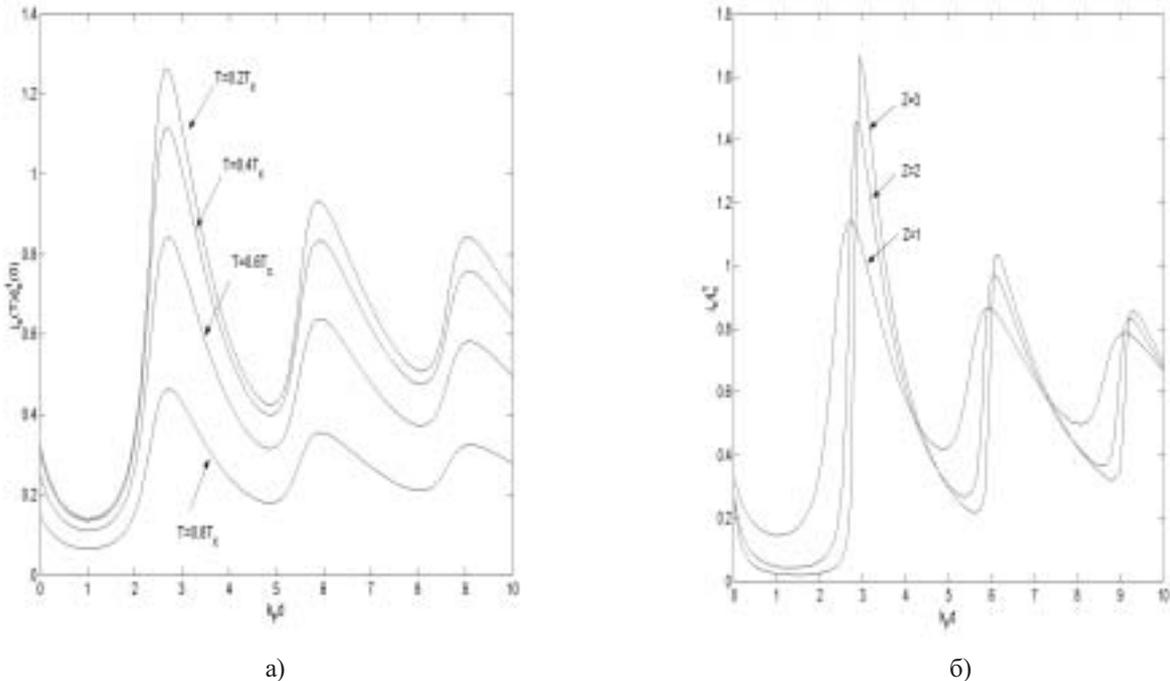


Рис. 1 Зависимость критического тока от расстояния между барьерами: а) $Z=1$, б) $T=0,5T_c$

Предельные случаи

Исследуем полученное выражение (14). В пределе $d \rightarrow 0$ оно должно совпадать с соответствующим выражением для тока Джозефсона через одиночный барьер, описываемый потенциалом

$$\tilde{U}(x) = 2W\delta(x). \quad (18)$$

Подставляя в коэффициентах B_i значения экспоненциальных множителей $N_k = N_q = 1$, можно убедиться, что (14) приводится к виду

$$j = \frac{ie}{2\pi\hbar} T \sum_{\omega} \int_{-\mu}^0 d\xi \left(-i\beta \frac{\Delta_0^2 (k-q)^2 \sin(2\varphi)}{\Delta_0^2 (k-q)^2 (\cos(2\varphi)-1) - 8\Omega^2 (2Z+k)(2Z+q)} \right) \quad (19)$$

При этом необходимо учитывать, что $2\varphi = (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_3 - \varphi_1$ - разность фаз между крайними сверхпроводниками. При $d \rightarrow \infty$ множители $N_k = N_q = 0$ и (14) имеет вид

$$j = \frac{ie}{2\pi\hbar} T \sum_{\omega} \int_{-\mu}^0 d\xi \left(-i\beta \frac{\Delta_0^2 (k-q)^2 \sin(\varphi)}{\Delta_0^2 (k-q)^2 (\cos(\varphi)-1) - 8\Omega^2 (Z+k)(Z+q)} \right) \quad (20)$$

Таким образом, при больших расстояниях между барьерами $d \gg \xi_0$ плотность тока Джозефсона через два барьера равна соответствующей величине для одного барьера.

Рассмотрим область $0 < d \ll \xi_0$. Критический ток $j_c = \max[j(\varphi)]$ обнаруживает резонансную структуру (рис.1) и может превышать критический ток отдельного барьера при резонансных значениях расстояния между барьерами.

Форма кривых на рис. 1 может быть получена так. Известно, что критический ток Джозефсона в SIS-контакте пропорционален коэффициенту прохождения электрона $D^{(1)} = (1 + Z^2)^{-1}$ через одиночный туннельный барьер. В нашем случае барьер описывается потенциалом (1), а коэффициент прохождения для электронов, движущихся перпендикулярно к плоскости барьера, имеет вид

$$D^{(2)} = \frac{1}{1 + 4Z^2 (\cos(k_F d) + Z \sin(k_F d))^2}. \quad (21)$$

Очевидно, что (21) очень зависит от угла между нормалью к плоскости барьера и направлением импульса Ферми. Учитывая это обстоятельство, перейдем в сферические координаты и усредним (21) по направлению k_F :

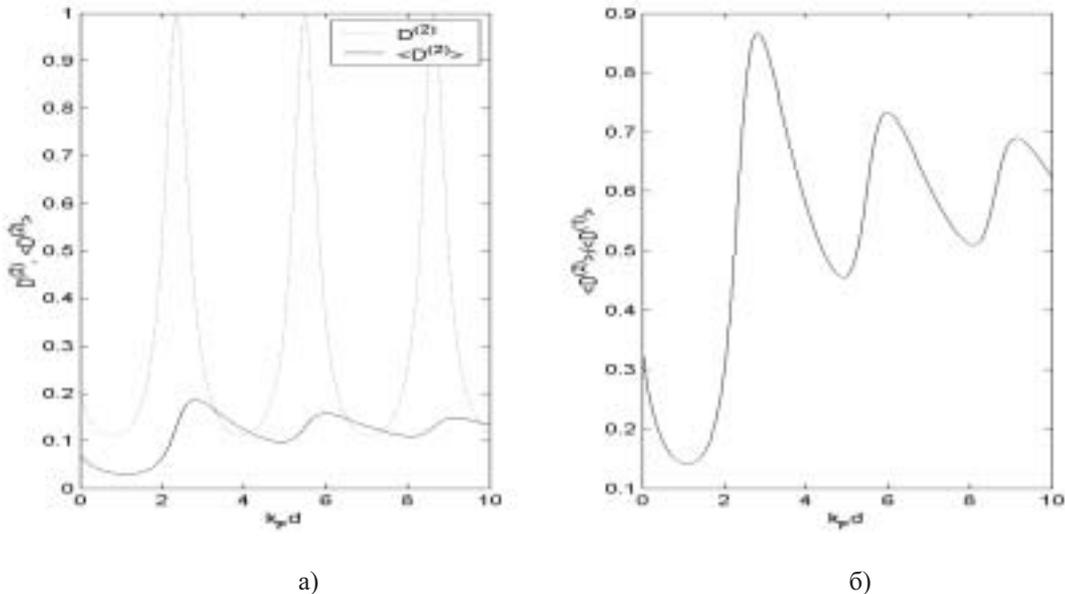


Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения от расстояния между барьерами при $Z=1$.

$$\langle D^{(2)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} D^{(2)}(\bar{k}_F) \sin(\theta) d\theta = \int_0^1 \frac{dx}{1 + 4 \left(\frac{Z}{x} \right)^2 \left(\cos(k_F x d) + \frac{Z}{x} \sin(k_F x d) \right)^2} \quad (22)$$

На рис. 2 изображена зависимость $\langle D^{(2)} \rangle$ от расстояния между барьерами. Видно, что критический ток на рис. 1 так же как и в случае SIS-контакта пропорционален коэффициенту прохождения $\langle D^{(2)} \rangle$.

Зависимость критического тока Джозефсона от температуры представлена на рис. 3 для двух характерных значений d . Кривая В получена для расстояния, соответствующего минимальному критическому току, и повторяет результат теории Амбегаокара-Баратова. Кривая А соответствует резонансному значению расстояния d . Кроме очевидной разницы в величине критического тока (кривые нормированы каждая на свое максимальное значение, поэтому рис. 3 этого не передает), меняется форма кривой. Однако, как и в случае зависимости критического тока от расстояния, усреднение по направлению импульса Ферми приводит к тому, что различие в форме резонансной и нерезонансных кривых невелико.

Более выразительный результат можно получить в рамках одномерной модели. Будем считать, что площадь поперечного сечения рассматриваемой структуры мала, так что все переменные будут функциями одной координаты. Выражение для тока Джозефсона (4) принимает в этом случае особенно простую форму

$$j(x) = \frac{ie\hbar}{m} T \sum_{\omega} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x} \right) G_{\omega}(x, x') \right]_{x'=x} \quad (23)$$

Выражение (14) для плотности тока Джозефсона принимает вид

$$j = \frac{ie}{2\pi\hbar} T \sum_{\omega} \left(-\frac{i\beta}{2} \frac{(B_1 \sin(\varphi) + 2B_2 \sin(2\varphi))}{B_0 + B_1(\cos(\varphi) - 1) + B_2(\cos(2\varphi) - 1)} \right) \quad (24)$$

причем в коэффициентах B_i следует сделать замену $k \rightarrow i\tilde{q}$, $q \rightarrow -i\tilde{k}$ $\tilde{k} = \sqrt{\beta(\mu + i\Omega)}$, $\tilde{q} = \sqrt{\beta(\mu - i\Omega)}$ для того, чтобы экспоненциальные множители в решении (7)-(9) имели правильный знак

Рассмотрим зависимость критического тока от расстояния между барьерами (рис.4а). Форма зависимости аналогична пунктирной кривой на рис. 2, причем максимальное значение критического тока соответствует критическому току отдельного контакта с $Z=0$. В этой связи следует ожидать, что температурная зависимость в резонансном случае также соответствует такому контакту. Действительно, температурная зависимость (рис.4б)

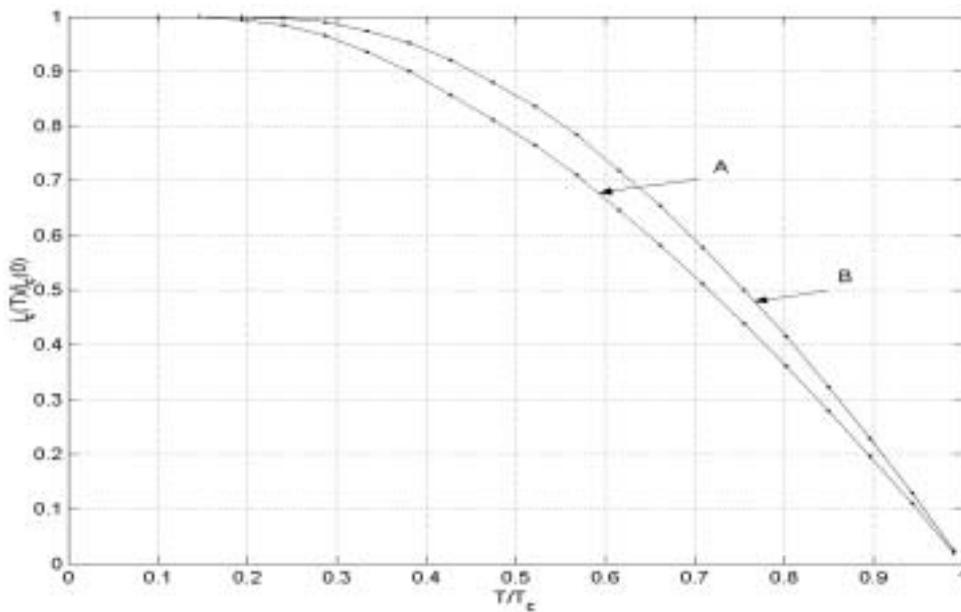


Рис. 3. Зависимость критического тока от температуры

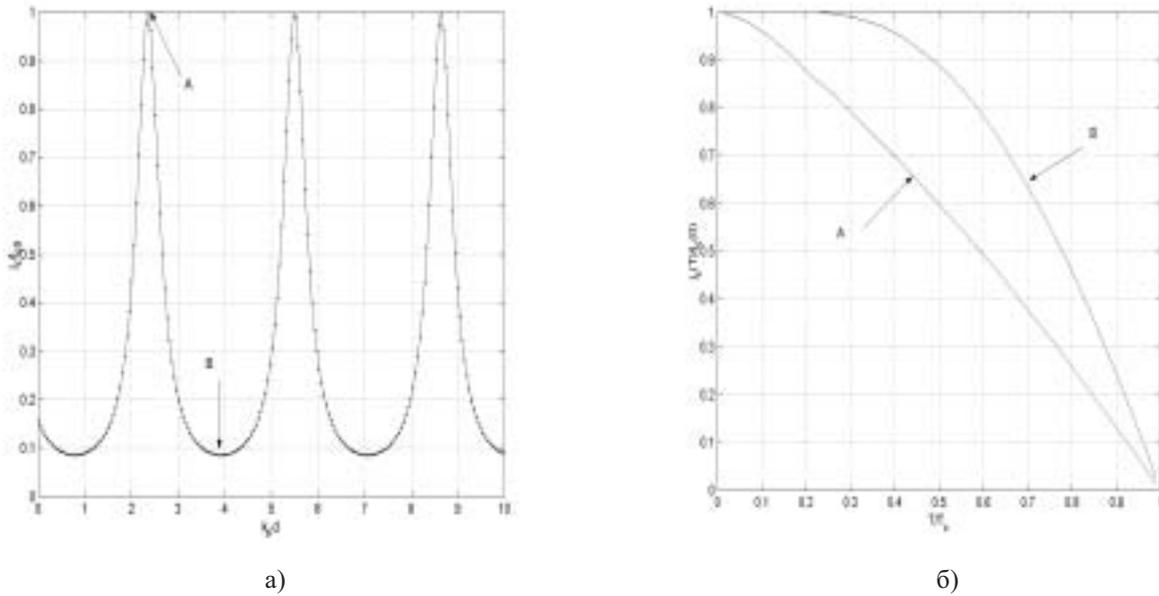


Рис. 4. Зависимость критического тока

а) от расстояния между барьерами при $Z=1$, $T=0,5T_c$, j_{c0} - критический ток отдельного контакта при $Z=0$;
 б) от температуры для резонансного (А) и нерезонансного (В) значений расстояния между барьерами

критического тока соответствует теории Кулика-Омельянука в чистом пределе. Таким образом, можно сделать вывод, что туннельные контакты с резонансной структурой очень чувствительны к геометрии задачи.

В приближении пространственной однородности сверхпроводящего параметра порядка Δ получено точное аналитическое решение уравнений Горькова для мацубаровских функций Грина рассматриваемой неоднородной SISIS структуры с резонансным тунелированием. Проведен анализ зависимости критического тока Джозефсона от расстояния между барьерами. Критический ток имеет резонансные пики, соответствующие пикам коэффициента прохождения электрона через соответствующий потенциальный барьер. Величина пиков зависит от температуры и превышает значение критического тока, вычисленное для обычного туннельного контакта с аналогичными параметрами.

Работа была поддержана индивидуальным грантом Красноярского Краевого Фонда Науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tsu R., Esaki L. /Tunneling in a finite superlattice//Appl. Phys. Lett. 1973. V.22, N11. P.562-564.
2. Kupriyanov M.Yu. et al. /Double-barrier Josephson structures as the novel elements for superconducting large-scale integrated circuits//Physica C. 1999. V. 326-327. P.16-45.
3. Nevirkovets I.P., Shafranjuk S.E./Resonant tunneling in S-I-S'-I-S multilayered devices//Phys. Rev. B. 1999. V.59. N2. P. 1311-1317.
4. Brinkman A., Golubov A.A./Coherence effects in double-barrier Josephson junctions//Phys. Rev. B. 2000. V.61. N17. P.11297-11300.
5. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962. 444 с.
6. Furusaky A., Tsukada M. /DC Josephson effect and Andreev reflection//Solid State Comm. 1991. V.78. N4. P.299-302.