О 5-МЕРНОМ ОБОБЩЕНИИ КОНФОРМНО-ПЛОСКОГО РЕШЕНИЯ БЕЛЛА-СЕКЕРЕША

А.М. Баранов, Н.М. Бардушко*

Используя метод алгебраической классификации 5-мерных пространств теории Калуцы, исследуются свойства обобщенной на 5-мерное пространство конформно-плоской 4-метрики Белла-Секереша, описывающей лобовое столкновение светоподобных пучков. Показано, что в 5-мерном пространстве-времени рассматриваемая метрика принадлежит к типу, аналогичному типу ***Ia*** *по классификации Петрова, и соответствует стоячей волне.*

Одним из основных методов исследования гравитационных полей в 4-мерном пространстве-времени считается алгебраическая классификация Петрова [1]. С помощью этой классификации по тензору Вейля, обобщающему тензор кривизны при наличии материи негравитационного происхождения, можно указать основные свойства заданного гравитационного поля по принадлежности его к тому или иному типу по Петрову.

В данной работе исследуется обобщение 4-мерной конформно-плоской метрики Белла-Секереша [2-3] на 5-мерное пространство Калуцы. С другой стороны, компоненты метрики зависят от запаздывающего и опережающего времен, а тензор энергии-импульса для данного пространства является бесследовым.

Таким образом, можно утверждать, что метрика Белла-Секереша описывает взаимодействие сильных электромагнитных волн. По общепринятым критериям [4] гравитационные волновые поля 4-метрик должны принадлежать к типам **N, III, II** по алгебраической классификации, в то время как пространство-время с метрикой Белла-Секереша оказывается конформно-плоским (алгебраический тип **0**).

Однако как поле слабой стоячей гравитационной волны, так и результирующее поле, полученное при “лобовом” столкновении слабых гравитационных волн, принадлежат алгебраическому типу **Ia**, введенному в [5-6] в дополнение к существующим алгебраическим типам. Поэтому принадлежность к типу **Ia** нельзя соотносить с волновыми свойствами исследуемого поля, а можно говорить лишь об аналогии со стоячей гравитационной или электромагнитной волнами в искривленном пространстве-времени..

Кроме того, анализ с точки зрения алгебраической классификации Петрова “лобового” столкновения сильных гравитационных волн (тип **N**) и электромагнитных пучков (тип **0**) на примерах точных решений уравнений тяготения был проведен в работе [7]. Поэтому основной задачей данной работы является обобщение 4-метрики Белла-Секереша на 5-мерие и анализ с точки зрения алгебраической классификации в рамках подхода [8] по обобщению алгебраической классификации Петрова римановых пространств размерности не выше четырех на 5-мерное пространство Калуцы.

Гравитационное поле светоподобных пучков при лобовом столкновении

Гравитационное поле внутренней области пучка электромагнитного или нейтринного [9] светоподобного излучения круглого сечения, направленного вдоль оси z, описывается метрикой (см., например, [10])

$$ds^2 = 2du\,dv - F^2(u)(dx^2 + dy^2), \qquad (1)$$

где запаздывающее и опережающее времена соответственно равны $u = t\text{-}z$ и $v = t+z$,скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная здесь взяты за единицу.

Источник светоподобного излучения - тензор энергии-импульса (ТЭИ), записывается как

$$T_{\alpha\beta} = \rho\, l_\alpha l_\beta, \qquad (2)$$

где ρ - плотность энергии пучка излучения, $l_\alpha = u_{,\alpha} = \delta^0_\alpha - \delta^3_\alpha$ - светоподобный вектор, $l_\alpha l^\alpha = 0$.

Если в пучке плотность энергии ρ постоянна (пучок однороден), то из уравнений Эйнштейна нетрудно найти, что функция F равна

$$F(u) = \cos(a_0 - u), \qquad (3)$$

где a_0 - постоянная.

Тогда метрика (1) для светоподобного однородного пучка переписывается в виде

$$ds^2 = 2du\,dv - \cos^2(a_0 - u)(dx^2 + dy^2). \qquad (4)$$

При этом совершенно очевидно, что при распространении светоподобного пучка в отри-цательном направлении оси z в метрике (4) следует произвести замену переменной u на v.

Алгебраический тип гравитационного поля, соответствующего такой метрике, относится к конформно-плоскому типу **0**, а внешняя область пучка принадлежит к чисто волновому типу **N** (см. [7]).

При конструировании метрики результирующего поля сталкивающихся “в лоб” светоподобных пучков, описываемых метриками вида (4), при учете аксиальной симметрии задачи с привлечением векторов Киллинга и соответствующих координатных преобразований с применением теоремы Эйзенхарта [11] о приведении квадратичной формы от двух переменных к конформно-плоскому виду удается записать общий вид метрики в области столкновения

$$ds^2 = 2\cdot(\exp(M))\,dudv \;-L\cdot(\exp(\beta))\,dx^2 - L\cdot(\exp(-\beta))\,dy^2, \tag{5}$$

где $M = M(u, v)$; $L = L(u, v)$; $\beta = \beta(u, v)$.

Метрика Белла-Секереша

Прежде чем рассматривать 5-мерное обобщение, исследуем исходную 4-мерную метрику (5). Для этого положим в области столкновения пучков функцию $M(u, v)$ нулю, а комбинации двух других функций соответственно $L\cdot(\exp(\beta)) \equiv \cos^2(av - bu)$ и $L\cdot(\exp(-\beta)) \equiv \cos^2(av + bu)$. Тогда метрика (5) переписывается в форме Белла-Секереша [2-3]

$$ds^2 = 2dudv - \cos^2(av - bu)dx^2 - \cos^2(av + bu)dy^2, \tag{6}$$

где a, b – постоянные.

Анализ уравнений Максвелла с метрикой вида (6) для случая лобового столкновения по-казывает, что результирующее электромагнитное поле поперечно, а тензор электромагнитного поля F_{ij} удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} F_{i\,j} = 0, \tag{7}$$

т.е. имеет место суперпозиция полей электромагнитного излучения $F_{i\,j} = F_{i\,j}^{(1)}(u) + F_{i\,j}^{(2)}(v)$.

Все это дает основания считать, что метрика (6) описывает сильные взаимодействующие электромагнитные (светоподобные) пучки.

Покажем, что она принадлежит к типу **0** (конформно-плоское решение) по алгебраиче-ской классификации Петрова.

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны Риччи R_{ij} записываются как

$$\begin{aligned} R_{uu} &= 2a^2; \\ R_{vv} &= 2b^2; \\ R_{xx} &= 2ab\cos^2(av - bu); \\ R_{yy} &= -2ab\cos^2(av + bu), \end{aligned} \tag{8}$$

где латинские индексы пробегают четыре значения: $i, j = 0,1,2,3$.

При этом скалярная кривизна $R = g^{i\,j} R_{i\,j}$ равна нулю,

$$R = 0. \tag{9}$$

Классификация тензора энергии-импульса

Так как скалярная кривизна равна нулю, тензор энергии-импульса $\kappa T_{i\,j} = -(R_{i\,j} - \frac{R}{2} g_{i\,j})$ с точностью до константы совпадает с тензором кривизны Риччи и является бесследовым, а значит, описывает в области взаимодействия пучков светоподобное поле (κ - гравитационная постоянная Эйнштейна и в выбранной нами системе единиц равна 8π).

Характеристическая λ-матрица для тензора энергии-импульса имеет вид

$$T(\lambda)=\begin{Vmatrix} 2a^2 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 2b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2ab+\lambda)\cos^2(av-bu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2ab+\lambda)\cos^2(av-bu) \end{Vmatrix}. \qquad (10)$$

Элементарными преобразованиями эта матрица приводится к диагональному виду:

$$T(\lambda)=diag(\lambda-2ab,\, \lambda+2ab,\, \lambda+2ab,\, \lambda-2ab). \qquad (11)$$

На главной диагонали стоят элементарные делители характеристического многочлена за-дачи на собственные значения для тензора энергии-импульса. Характеристика Сэгре при этом имеет вид:

$$[(1\ 1)\ (1\ 1)]. \qquad (12)$$

В характеристике Сэгре перечислены степени элементарных делителей (множителей) характеристического многочлена, а круглыми скобками объединены степени элементарных де-лителей с одинаковыми собственными значениями. Суммируя числа в круглых скобках, получа-ем кратность характеристических собственных значений рассматриваемой матрицы.

Тензор энергии-импульса с полученной выше характеристикой Сэгре принадлежит к первому алгебраическо-му типу по классификации тензоров энергии-импульса (степени элемен-тарных делителей равны единицы). Соб-ственные значения можно разделить на две пары. В каждой паре собственные значения совпадают, отличаясь от значений в другой паре лишь знаком.

Таким образом, тензор энергии-импульса для пространства-времени, описываемого мет-рикой (6), принад-лежит к типу **Ia** по классификации тензоров энергии-импульса, соответствую-щему стоячим плоским электро-магнитным волнам. След тензора энергии-импульса равен нулю, как и в случае электромагнитного поля.

Классификация тензора конформной кривизны Вейля

Рассмотрим алгебраическую классификацию гравитационного поля, описываемого мет-рикой (6). Согласно подходу Петрова классификация проводится по собственным значениям и собственным векторам характеристи-ческой матрицы, получаемой из тензора Вейля,

$$W_{ijkl}=R_{ijkl}+R_{k[i}g_{j]l}-R_{l[i}g_{j]k}-\frac{1}{3}R\,g_{k[i}g_{j]l}, \qquad (13)$$

в 4-мерии при помощи отображения на 6-мерное би-векторное евклидово пространство. Здесь g_{ij} - метрический тензор, R_{ijkl} - тензор кривизны, а скалярную кривизну R в рассматривае-мом случае следует положить равной нулю; квадратными скобками обозначена антимимметри-зация по индексам.

При таком отображении каждой антисимметричной паре индексов тензора Вейля ставит-ся в соответствие новый обобщенный индекс по следующему индексному правилу:

$$\begin{aligned} &01\to 1,\quad 02\to 2,\quad 03\to 3,\\ &23\to 4,\quad 31\to 5,\quad 12\to 6. \end{aligned} \qquad (14)$$

Все компоненты матрицы Вейля для метрики (6) оказываются равными нулю:

$$W=\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right\Vert \qquad (15)$$

Это означает, что все собственные значения такой матрицы равны нулю и элементарные делители имеют первый порядок. Характеристика Сэгре принимает следующий вид:

$$[(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)]. \tag{16}$$

Пространство-время с такой характеристикой матрицы Вейля является конформно-плоским и принадлежит к алгебраическому типу **0** по классификации Петрова, обладающему максимальной симметрией. Необходимо отметить, что такие пространства используются, как правило, для построения космологических моделей.

Обобщение метрики Белла-Секереша на 5-мерие

Произведем простейшее обобщение метрики (6) на 5-мерное пространство-время теории Калуцы. Для этого введем дополнительную пространственную координату w. Метрический элемент при этом перепишется в виде

$$ds^2 = 2dudv - \cos^2(av - bu)dx^2 - \cos^2(av + bu)dy^2 - dw^2. \tag{17}$$

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны Риччи совпадают с соответствующими 4-мерными компонентами (8).

При этом скалярная кривизна $R = g_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, как и в 4-мерии, равна нулю,

$$R = 0, \tag{18}$$

здесь греческие индексы пробегают пять значений: $\alpha, \beta = 0,1,2,3,5$.

Классификация 5-мерного тензора энергии-импульса

Классификация тензора энергии-импульса проводится аналогично 4-мерному случаю. Для ТЭИ ставится задача на собственные значения, и классификация выполняется по характе-ристике Сэгре, описывающей количество различных собственных значений и собственных век-торов. В 5-мерном пространстве-времени, отвечающем метрике (17), характеристическая мат-рица для тензора энергии-импульса записывается как

$$T_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 2a^2 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2ab+\lambda)\cos^2(av-bu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2ab+\lambda)\cos^2(av+bu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Равенство нулю компонент $T_{\alpha 5}$ свидетельствует об отсутствии в пространстве-времени с с метрикой (17), источников электромагнитного и скалярного полей.

Элементарными преобразованиями матрица (19) приводится к диагональному виду:

$$T(\lambda) = diag(\lambda - 2ab,\ \lambda + 2ab,\ \lambda + 2ab,\ \lambda - 2ab,\ 0). \tag{20}$$

На главной диагонали стоят элементарные делители характеристического многочлена за-дачи на собственные значения для тензора энергии-импульса. Характеристика Сэгре при этом имеет вид:

$$[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 1]. \tag{21}$$

Как и в 4-мерном случае тензор энергии-импульса для пространства, описываемого мет-рикой (17) принадлежит к типу **Ia**, соответствующему плоским стоячим волнам.

Классификация 5-мерного тензора Вейля

Рассмотрим алгебраическую классификацию поля, имеющего метрику (17). Классифика-ция в соответствии с обобщением [8] подхода Петрова к алгебраической классификации рима-новых пространств размерности не выше 4-х на 5-пространство Калуцы проводится по собст-венным значениям и собственным векторам тензора конформной кривизны Вейля.

В 5-мерном пространстве тензор конформной кривизны Вейля записывается как

$$W_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{3}(R_{il}g_{km} - R_{im}g_{kl} - R_{im}g_{kl} + R_{km}g_{il}) + \frac{R}{12}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}). \tag{22}$$

Симметрия тензора (22) относительно перестановки индексов пространстве Калуцы со-храняется: тензор Вейля симметричен относительно перестановки пар индексов и антисиммет-ричен относительно перестановки символов в каждой паре.

Классификация проводится по собственным значениям и собственным векторам тензора Вейля, рассматриваемого как линейный оператор в пространстве би-векторов. Выбрав базис в пространстве би-векторов, можно получить матричное представление для тензора Вейля:

$$W_{iklm} \to W_{AB}, \tag{23}$$

и для метрического тензора пространства би-векторов:

$$G_{iklm} \to G_{AB}. \tag{24}$$

Индексы *A, B* для пространства Калуцы пробегают значения: A,B = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Отображение на би-векторное евклидово пространство производится при помощи специального индексного правила. Каждой антисимметричной паре индексов тензора Вейля ставится в соот-ветствие новый обобщенный индекс по следующему индексному правилу:

$$\begin{gathered} 01 \to 1, \quad 02 \to 2, \quad 03 \to 3, \quad 23 \to 4, \quad 31 \to 5, \\ 12 \to 6, \quad 05 \to 7, \quad 15 \to 8, \quad 25 \to 9, \quad 35 \to 10. \end{gathered} \tag{25}$$

Индексное правило в 5-мерии подбирается так, чтобы сохранить преемственность с ал-гебраической классификацией Петрова римановых пространств размерности не выше четырех и придать матрице кривизны в би-векторном пространстве блочную структуру. Так что различные блоки матрицы соответствуют различным физическим полям: гравитационному, электромаг-нитному, скалярному [8].

Классификация проводится по собственным значениям и собственным векторам харак-теристической матрицы $W_{AB}(\lambda)=W_{AB}-\lambda G_{AB}$.

Матрица Вейля в 5-мерии приобретает вид:

$$W_{AB} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 g_1 & 0 & 0 & bag_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 g_2 & 0 & 0 & -bag_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2/3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bag_1 & 0 & 0 & -b^2 g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bag_2 & 0 & 0 & -b^2 g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3a^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2bag_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2bag_2 \end{array} \right\|, \tag{26}$$

где

$$g_1 = (1/3)\cos^2(av - bu),$$
$$g_2 = (1/3)\cos^2(av + bu).$$

Аналогом единичной матрицы в би-векторном пространстве выступает метрический би-тензор:

$$G_{\alpha\beta\ \gamma\delta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \tag{28}$$

или в рассматриваемом случае

$$G_{AB}=\left\|\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1g_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_2
\end{array}\right\|. \qquad (28)$$

где

$$g_1=(1/3)\cos^2(au-bv),$$
$$g_2=(1/3)\cos^2(au+bv).$$

Характеристическая матрица

$$W_{AB}(\lambda)=W_{AB}-\lambda G_{AB} \qquad (29)$$

Элементарными преобразованиями характеристическая матрица Вейля $W(\lambda)=W-\lambda G$ приводится к диагональному виду:

$$W(\lambda)=diag(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda,\lambda-2ab,\lambda+2ab,\lambda+2ab,\lambda-2a^2/3,\lambda+2a^2/3). \qquad (30)$$

На главной диагонали стоят элементарные делители характеристического многочлена. Все элементарные делители имеют первую степень. В итоге, четыре собственных значения рав-ны нулю, три пары (с учетом кратности), в которых собственные значения отличаются только знаком: $\pm 2ab$ (кратности 2) и $\pm 2a^2/3$.

Характеристика Сэгре приобретает вид:

[(1 1 1 1) (1 1) (1 1) 1 1]. (31)

Таким образом, пространство, описываемое метрикой (17), принадлежит к алгебраиче-скому типу, аналогичному типу **Ia**, соответствующему плоским стоячим волнам.

Классификация 5-мерного решения по тензору кривизны Римана

Используя отображение тензора кривизны Римана на пространство би-векторов, можно построить еще один вариант классификации. Обоснованность использования для классифика-ции тензора кривизны Римана вместо тензора конформной кривизны Вейля заключается в сле-дующем. Тензор кривизны, играя роль относительной напряженности гравитационного поля, оказывает влияние на поведение пробных частиц через уравнение девиации геодезических:

$$\frac{d^2n^\alpha}{ds^2}=-R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,u^\beta n^\gamma u^\delta, \qquad (32)$$

где u^α - вектор 4-скорости, касательный к геодезической, по которой движется пробная части-ца, n^α - параметрический вектор, ортогональный 4-скорости.

Таким образом, можно связать алгебраическую классификацию с наблюдаемыми вели-чинами, что расширяет возможности анализа известных и поиска новых решений уравнений Эйнштейна. Кроме того, для пустых пространств, в которых тензор Риччи равен нулю, оба ва-рианта классификации совпадут.

Алгебраическая классификация выполняется аналогично классификации тензора Вейля. Используя отображение на 10-мерное би-векторное пространство, получаем матричное пред-ставление тензора кривизны. Индексное правило, используемое при отображении, подобрано так, что матрица, соответствующая тензору кривизны, приобретает блочную структуру [8].

$$R_{AB} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 g_1 & 0 & 0 & bag_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 g_2 & 0 & 0 & -bag_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bag_1 & 0 & 0 & -b^2 g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bag_2 & 0 & 0 & -b^2 g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{33}$$

Каждый блок матрицы (38) соответствует определенному физическому полю: гравитаци-онному, электромагнитному, скалярному. В полученной матрице блоки, соответствующие элек-тромагнитному и скалярному полям, равны нулю.

Характеристическая матрица:

$$R_{AB}(\lambda) = R_{AB} - \lambda G_{AB} \tag{34}$$

элементарными преобразованиями может быть приведена к диагональному виду:

$$R_{AB}(\lambda) = diag(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda - 4ab, \lambda + 4ab). \tag{35}$$

Характеристика Сэгре для такой матрицы имеет вид:

$$[\ (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ ]. \tag{36}$$

При этом два собственных значения отличаются только знаком. Следовательно, тензор Римана принадлежит к алгебраическому типу, аналогичному типу **Ia** в 4-мерии.

В заключение необходимо отметить, что в работе конформно-плоская 4-метрика Белла-Секереша, описывающая столкновение сильных электромагнитных пучков, была обобщена на 5-мерие путем простого добавления в 4-интервал квадрата дифференциала еще одной простран-ственноподобной переменной. В рамках подхода [8] по обобщению алгебраической классифи-кации Петрова римановых пространств размерности не выше четырех на 5-мерное пространство Калуцы проведена алгебраическая классификация 5-мерной метрики Белла-Секереша. Один из основных результатов, полученных при приведенном выше анализе, заключается в том, что та-кое обобщение не сохраняет своих свойств симметрии: решение, принадлежащее к максиально симметричному алгебраическому типу **0** (конформно-плоскому) в 4-мерии, при обобщении пе-решло в низко симметричный алгебраический тип **Ia** в 5-мерии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. - М.: Наука, 1966.- 495 с.
2. Bell P., Szekeres P. Interacting electromagnetic shock waves in general relativity // GRG.- 1974. - V.5. - № 3. - P.275
3. Griffiths J.B. The collision of plane waves in general relativity //Ann.of Phys.- 1976. - V.102 - P.388-404.
4. Захаров В.В. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна.- М.: Наука,1972.-199 с.
5. Баранов А.М. Слабые гравитационные поля и классификация пространств по Петрову /Ун-т Дружбы народов им.П.Лумумбы. -М., 1976. -Деп.ВИНИТИ - 13.07.76, № 2627-76.
6. Мицкевич Н.В., Баранов А.М., Луговцов В.В. Композиция типов пространств по классифи-кации Петрова / /Материалы IV Всесоюзн. конфер. "Современные теоретические и экспери-ментальные проблемы теории относительности и гравитации". - Минск. - 1976. -С.195-200.
7. Баранов А.М. О наложении пространств N- и 0-типов на примерах точных решений урав-нений тяготения / / Изв. вузов (Физика). - 1995. - № 5. - С. 77-82.
8. Баранов А.М. Алгебраическая классификация гравитационных полей в 5-мерном простран-стве-времени // Изв. вузов (Физика). - 1995. - № 3. - С. 73-78.
9. Griffiths J.B., Newing R.A. Geometrical aspects of two-component neutrino field in general relativity // J.Phys. A: Gen. Phys. - 1971. - V.4.- P.208-213.
10. Misner C., Thorne K., Wheeler J. Gravitation. - San Francisco, 1973. - P.961.
11. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. - М.: ГИИЛ, 1948.- С.114.